Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика»

Матвеева Л.Д. Рудый А.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
КУРС ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ.

М и н с к 2019

УДК 519.85 (075.8)

ББК 18.87я7

М 54

Авторы: Л.Д. Матвеева, А.Н. Рудый

Рецензент:

М.И.Фурсанов

Настоящее издание включает в себя лекции и задания по темам «Функции нескольких переменных» .

По всем темам приводятся примеры решения типовых задач.

Издание содержит список рекомендуемой литературы.

Задания и методические указания предназначены для студентов 1 курса энергетического и автотракторного факультетов БНТУ. Они могут быть также полезны преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу. Авторы благодарят Бохан Е.Л. за помощь при подготовке электронного варианта лекций.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

В пособии изложены лекции, читаемые авторами на 1-ом курсе Энергетического факультета БНТУ. Для закрепления теоретического материала в каждом параграфе приводятся практические примеры. В конце каждого параграфа приводятся упражнения, что важно при самостоятельной проработке курса. Материал разделен на разделы:

1) Пределы и производные функций нескольких переменных;
2) Производные сложных и неявных функций нескольких переменных;
3) Экстремумы, приложения в задачах экономики.

Номерация параграфов является продолжением номерации пособий [9],[13].

Авторы благодарят Е.Л.Бохан за помощь при работе над рукописью.

35.Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 35.1. Метрическим пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из n действительных чисел x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Каждый такой набор называется точкой, x_1 − первая координата точки, x_2 − вторая координата точки, и т.д.

Расстояние между точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определим по формуле

$$\rho(x, \quad y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}. \qquad (1)$$

Функция $\rho(x, y)$ называется метрикой пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 35.1. Плоскость с фиксированной системой координат − метрическое пространство $\mathbb{R}^2$, трехмерное пространство с фиксированной системой координат − метрическое пространство $\mathbb{R}^3$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать, как евклидово n – мерное пространство, если определить сумму векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ по правилу: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

Умножение вектора *x* на число $\alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_n)$.

Скалярное произведение векторов: $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n$.

Тогда норма вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ находится по формуле $\|x\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_n^{\,2}}$ и (1) перепишется в виде:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \qquad (2)$$

Свойства нормы.

$\forall\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$:

1) $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \|x\| \cdot \|y\|$ - неравенство Коши-Буняковского (3)

2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (4)

3) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, . . ., 0) = 0$ (точку $(0, . . ., 0)$ будем обозначать 0).

4) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Докажем свойство 1).

Пусть $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0 \Rightarrow$

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - ty_i)^2 = t^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2. \qquad (5)$$

Неравенство (5) выполняется $\forall t \in \mathbb{R}$, правая часть формулы (5) – квадратный трехчлен относительно t $\Rightarrow$ дискриминант

$D = 4(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) \leq 0$, что и требовалось доказать.

Упражнение 35.1. Доказать неравенство (4).

Свойства метрики.

$\forall \;\; x, \;\; y, \;\; z \in \mathbb{R}^n$:

1) $\rho(x, \; y) = \rho(y, x)$

2) $\rho(x, \; y) \geq 0$; $\rho(x, \; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

3) $\rho(x, \; y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ - неравенство треугольника.

Упражнение 35.2. Доказать свойства 1 – 3 метрики.

Определение 35.2. Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$. Множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\rho(x, \;\; x^{(0)}) < \varepsilon$ называется ε – окрестностью точки $x^{(0)}$ и обозначается $O_\varepsilon(x^{(0)})$. Таким образом

$$O_\varepsilon(x^{(0)}) = \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R}^n, \rho(x, \;\; x^{(0)}) < \varepsilon \right\}.$$

$O_\varepsilon(x^{(0)})$ называется n – мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке x^0. Множество $\dot{O}_\varepsilon(x^{(0)}) = O_\varepsilon(x^{(0)}) \setminus \left\{ \; x^{(0)} \right\}$ называется выколотой окрестностью точки $x^{(0)}$. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall \; x^{(0)} \in D \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}: O_\varepsilon(x^{(0)}) \subset D$. Множество D называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus D$ – открыто. Точка $y \in \mathbb{R}^n$ называется предельной точкой для множества *D*, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек из *D*. Множество *D* называется ограниченным, если

$\exists \; M \in \mathbb{R}: \; \forall x, \;\; y \in D \Rightarrow \rho(x, \;\; y) \le M$.

Пример 35.2. $D_1 = \{(x,\, y) | x^2 + y^2 \le 2\}$

$D_2 = \{(x,\, y) | x^2 + y^2 < 2\}$

$D_3 = \{(x,\, y) | \; 1 < x^2 + y^2 \le 2\}$

D_1 – замкнуто, D_2 – открыто , D_3 – не является ни открытым, ни замкнутым.

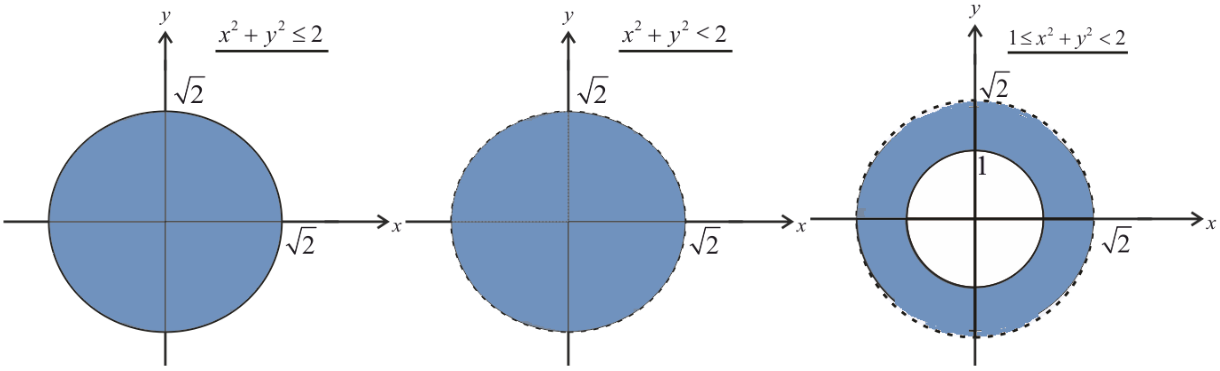


Рис. 35.1.

Упражнение 35.3. Доказать, что множество *D* – замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение 35.4.

$S_1 = \{(x,\, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

$S_2 = \{(x,\, y) | \; |x| + |y| \le 1\}$

$S_3 = \{(x,\, y) | \; x + y \ge 1, x \ge 0, y \ge 0 \; \}$

$S_4 = \{(x,\, y) | 0 \le y \le x\}$.

Изобразить на плоскости множества: S_1, S_2, S_3, S_4; $S_1 \setminus S_2$; $S_1 \cap S_3$; $S_1 \setminus S_3$; $S_4 \setminus S_1$ и определить какие из них являются открытыми, замкнутыми, ограниченными.

Определение 35.3. Последовательность точек $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ из $\mathbb{R}^n$ называется сходящейся к точке $a \in \mathbb{R}^n$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): m > N \Rightarrow \rho(x^{(m)}, a) < \varepsilon. \qquad (6)$$

При этом пишут: $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$.

Из (6) следует теорема.

Теорема 35.1. (О покоординатной сходимости).

Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$, где $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$; $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} x_1^{(m)} = a_1$; $\lim\limits_{m\to\infty} x_2^{(m)} = a_2$, . . . , $\lim\limits_{m\to\infty} x_n^{(m)} = a_n$.

Пример 35.3. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{2m+1}{m}; \left(1+\dfrac{3}{m}\right)^m\right) = (2; e^3)$.

Определение 35.4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и пусть любому $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ поставлено в соответствие действительное число $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$; u называется функцией с областью определения *D*. Множество *D* обозначается $D(u)$.

Пример 35.4. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Найти $D(u)$.

Решение. $D(u) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 9 \geq 0\}$- внешняя часть круга радиуса 3 включая его границу.

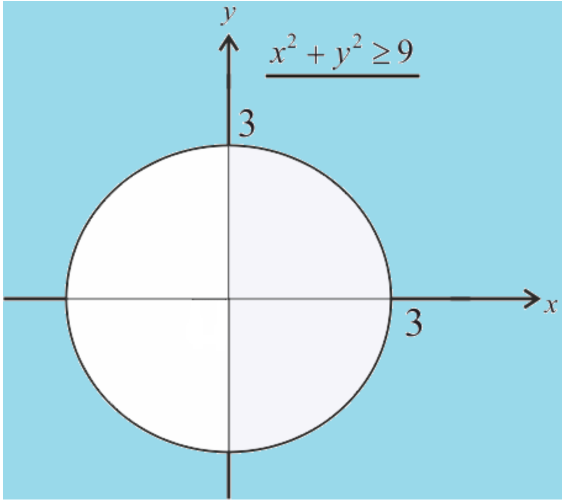


Рис. 35.2.

Упражнение 35.5.

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\sqrt[4]{y-5}$$

$u_2=\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)}$. Найти $D(u_1), D(u_2)$.

Пусть $z=f(x, y)$ – функция двух переменных. Её можно изобразить графически в виде поверхности $(x, y, f(x,y)),(x,y)\in D(f)$.

Определение 35.5. Линией уровня функции $z=f(x, y)$ называется множество точек плоскости заданных уравнением $f(x, y)=C$, где C – постоянная.

Пример 35.5. $z=x^2+y^2,\quad (x\ ,\ y)\in\mathbb{R}^2$.

Найдем линии уровня $x^2+y^2=C, C=0, 1, 4, 9$.

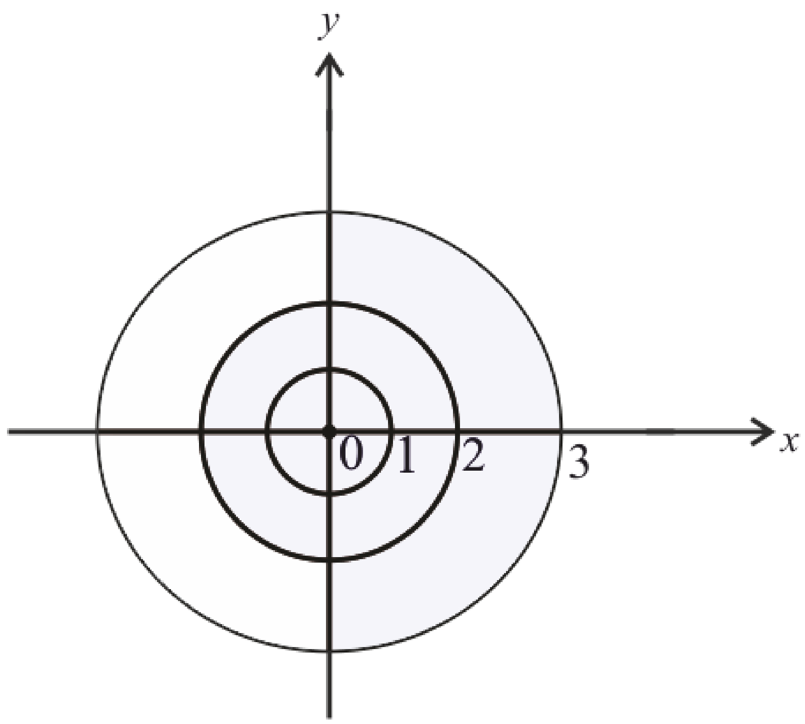


Рис. 35.3.

Линии уровня представляют собой проекцию на плоскость Oxy линий пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 9. \end{cases}$$

Упражнение 35.6. $z = x^2 - y^2$. Изобразить на плоскости линии уровня $x^2 - y^2 = C, C = 0, 1, -1$.

Определение 35.6. (предел функции по Гейне). Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $a_0(x_0, y_0)$ за исключением может быть самой точки a_0; $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, если для любой последовательности точек $\{x_n, y_n\}$, такой что $\forall n,\ x_n \neq x_0,\ y_n \neq y_0$ и такой что $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ последовательность значений функции $\{f(x_n, y_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = A$.

Определение 35.7. (предел функции по Коши). Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $a_0(x_0, y_0)$ за исключением может быть самой точки a_0; $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, если

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta = \delta(\varepsilon): \; \forall \quad (x, y) \in \dot{O}_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow \left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon .$$

Теорема 35.2. Определения 35.6 и 35.7 эквивалентны.

Теорема 35.3. Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x, y) = B$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \pm g(x, y) = A \pm B$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \cdot g(x, y) = A \cdot B$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}, \text{ (если } B \neq 0 \text{)}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.3 в [9].

Пример 35.6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}(x \cdot y)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}(x \cdot y)}{x \cdot y} \cdot y =$ | По теореме 35.3| =

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x \cdot y)}{x \cdot y} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} y = 1 \cdot 0 = 0.$$

Пример 35.7. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$.

Воспользуемся определением 35.6, $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$. Рассмотрим последовательность $\left(0; \dfrac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n \to \infty} \left(0; \dfrac{1}{n}\right) = (0; 0)$ и последовательность $\left(\dfrac{1}{n}; 0\right)$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n}; 0\right) = (0; 0)$.

Далее $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(0; \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{0 - \frac{1}{n^3}}{0 + \frac{1}{n^3}} = -1$, $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{n}; 0\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\frac{1}{n^3} - 0}{\frac{1}{n^3} + 0} = 1$.

Так как пределы не равны, то из определения 35.6 следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$ не существует.

Упражнение 35.7. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}\right)^{x^2+y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2 + y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; ж) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$; з) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$;

и) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx,\ k\neq 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$; к) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Ответы на упр.35.7. а) 0; б) не существует (перейти в полярные координаты); в) 0; г) 0; д) 0; е) не существует; ж) 0 ; з) не существует; и) 0; к) $\dfrac{1}{2}$.

Определение 35.8. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$ точки $a_0(x_0, y_0)$; $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $a_0(x_0, y_0)$, если

1) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ непрерывна на множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Точки, в которых функция не является непрерывной называются точками разрыва.

Пример 35.7. Исследуем функцию на непрерывность:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ не существует (см. упр. **35.7** б)), поэтому $f(x, y)$ – разрывна в точке (0, 0).

Нужно отметить, что $f(x, 0)=0\ \forall x\in R$ и $f(0, y)=0\ \forall y\in R$, поэтому $f(x, y)$ непрерывна в точке (0, 0) по каждой из переменных, но разрывна в этой точке по совокупности переменных.

Теорема 35.4 (теорема Вейерштрасса).

Пусть функция $z=f(x, y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, тогда $\exists\, a_0(x_0, y_0)$ и $a_1(x_1, y_1)$ такие что

$$f(x_0, y_0)=\max_{(x,y)\in D} f(x, y) \quad \text{и} \quad f(x_1, y_1)=\min_{(x,y)\in D} f(x, y)$$

(глобальные максимум и минимум).

Задания к § 35 .

35.1 Найти область определения функции:

1) $z=\sqrt{2x^2+2y^2-8}$; 2) $z=3x-5y+7$;

3) $z=\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+3y^2-18}}$; 4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$;

5) $z=2x-\sqrt{y}$; 6) $z=\arcsin(2-x)+\arcsin\dfrac{y}{x^2}$;

7) $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 8) $z=\sqrt{xyz}$;

9) $u=2y+\sqrt[3]{xz}$; 10) $u=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}}$.

35.2. Построить линии и поверхности уровня функции:

1) $z=\dfrac{x^2}{y}$; 2) $z=2x^2-3y^2$; 3) $z=\dfrac{1}{2x^2+4y^2}$;

4) $z=\dfrac{\sqrt{2y}}{x}$;5) $u=x^2+y^2+z^2$; 6) $u=x^2-y^2+z^2$;

7) $u=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$; 8) $u=x-y+2z$.

35.3. Вычислить пределы функции.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{3x^2y^2}{5-2xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{4}{5x^3-y^2}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\operatorname{tg}3xy}{2y}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^3+y^3)^{\frac{2}{x^3+y^3}}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin 6xy}{xy^2}$; **7)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^3+y^3)}{6(x^3+y^3)}$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}}\left(1+\dfrac{2}{xy}\right)^{3xy}$;

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(8x+8y)}{5x^2+10xy+5y^2}$; 10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\sqrt[x]{1+xy}$;

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt[y]{1-\sin 5xy}$; 12) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 4}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-3}{x^2y^2-64}$.

Ответы:

35.1 1) $x^2+y^2\ge 4$; 2) Вся плоскость Oxy; 3) $x^2+y^2>6$;

4) $x^2+y^2<5$; 5) Полуплоскость $y\ge 0$;

6) $-x^2\le y\le x^2$, $1\le x\le 3$;

7) $y>x$ и $y>-x$;

8) Множество точек пространства, для которых $xyz\ge 0$;

9) Два октанта пространства, для которых: $x\ge 0,\ z\ge 0$ и $x\le 0,\ z\le 0$;

10) $x^2-y^2-z^2>16$.

35.2. 1) Семейство парабол $x^2=Cy$; 2) Семейство гипербол $\dfrac{x^2}{C}-\dfrac{y^2}{C}=1$;

3) Семейство эллипсов $\dfrac{x^2}{2C}+\dfrac{y^2}{4C}=1$;

4) семейство парабол $x^2 = \frac{4}{C^2} y$; 5) Семейство сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C$;

6) Семейство однополостных гиперболоидов $\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} + \frac{z^2}{C} = 1$;

7) Семейство конусов: $x^2 - \frac{y^2}{C^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$;

8) Семейство плоскостей: $x - y + 2z = C$.

35.3. 1) 12; 2) ∞; 3) 4,5; 4) e^2;

5) 0; 6) 3; 7) $\frac{1}{6}$; 8) e^6;

9) $\frac{32}{5}$; 10) e^3; 11) e^{-5}; 12) $\frac{1}{16}$.

36.Дифференцируемость функций нескольких переменных.

Определение 36.1. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$ точки $a_0(x_0, y_0)$. Зафиксируем значение y_0 и рассмотрим функцию одной переменной $z = f(x, y_0)$, которая определена в некоторой окрестности $O_{\delta_1}(x_0)$. Частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется производная функции $f(x, y_0)$ в точке x_0.

Аналогично, частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется производная функции $f(x_0, y)$ в точке y_0.

Итак:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \qquad (36.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}. \qquad (36.2)$$

Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, тогда формулы (36.1), (36.2) перепишутся в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (36.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}. \qquad (36.4)$$

Другие обозначения $f'_x(x_0, y_0)$, $z'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$.

Аналогично определяются частные производные для функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определенной в некоторой окрестности $O_\delta(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ точки $a_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - u(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_i}, \qquad (36.5)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Так как в правых частях формул (36.1) – (36.5) фигурируют функции одной переменной, то при вычислении частных производных используют формулы (6.8) – (6.11) из §6 [9]

Пример 36.1. $u = x^3 y^2 + \sin^5(z^2 - y) + \sqrt{y}$.

$u'_x = 3x^2 \cdot y^2$; ;

$u'_z = 5\sin^4(z^2 - y) \cdot \cos(z^2 - y) \cdot 2z$.

Нужно заметить, что если частные производные в точке существуют, то этого не достаточно для того, чтобы функция была непрерывной в данной точке.

Пример 36.2. Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & ;(x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Тогда $z(x,\, 0) = 0,\ \forall x \in R \Rightarrow z'_x(0,0) = 0$.

$z(0,\, y) = 0,\ \forall y \in R \Rightarrow z'_y(0,0) = 0$.

Однако функция z разрывна в точке (0, 0) (см. упражнение 35.6 б) .

Определение 36.2. Пусть функция $z = f(x,\, y)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(x_0,\, y_0)$ точки $a_0(x_0, y_0)$ и в этой точке определены частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Пусть $\Delta x, \Delta y$ таковы, что точка $a(x, y) \in O_\delta(x_0,\, y_0)$, где $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$.

Пусть $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho(a,\ \ a_0)$.Рассмотрим приращение функции

$$\Delta z = f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0).$$

Функция $z = f(x,\, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x +$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)\Delta y + o(\rho), \qquad (36.6)$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$ (функция $o(\rho)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем ρ, при $\rho\to 0$).

Теорема 36.1. Если функция $z=f(x,\ y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=|\,\textit{из } 36.6\ \textit{следует, что}\,|=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)\Delta y+o(\rho)=f(x_0,\ \ y_0),$$

что и требовалось доказать.

Существование частных производных(см.определение 36.2) является необходимым , но не достаточным условием дифференцируемости функции $z=f(x,\ y)$.

Пример 36.3. рассмотрим функцию из примера 36.2, $z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=0$. Однако она разрывна в точке (0, 0) и потому не дифференцируема в этой точке(см. теорему 36.1).

Теорема 36.2. Пусть функция $z=f(x,\ y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и они непрерывны в этой точке. Тогда $z=f(x,\ y)$ дифференцируема в этой точке. Для доказательства см. [1](Кудрявцев) .

Условия непрерывности частных производных в точке (x_0,y_0) в теореме 36.2 являются достаточными, но не необходимыми для дифференцируемости функции.

Пример 36.4. Рассмотрим функцию

$$z=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \qquad ; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=0$; $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ разрывны в точке (0, 0).

Однако z дифференцируема в точке (0, 0). (см. [2] , задача 3253).

Определение 36.3. Пусть функция $z=f(x,\, y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Линейная относительно $\Delta x,\,\Delta y$ функция $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$ называется дифференциалом функции $f(x,\, y)$ в точке (x_0,y_0) и обозначается dz. Таким образом

$$\mathrm{dz}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta y, \tag{36.7}$$

или, если $\Delta x,\,\Delta y$ обозначить $\mathrm{dx},\,\mathrm{dy}$, то

$$\mathrm{dz}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{dy}. \tag{36.8}$$

Из формулы (36.6) следует, что $\Delta z = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,\,y_0)\approx\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\;y_0)\Delta y$, (так как $o(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$).

Пример 36.5. $z=x^2+y^3+x\cdot e^y$. Найти dz.

Решение. $z'_x=2x+e^y$; $z'_y=3y^2+x\cdot e^y$, по формуле (36.8):

$$\mathrm{dz}=(2x+e^y)\,\mathrm{dx}+(3y^2+x\cdot e^y)\,\mathrm{dy}.$$

Пример 36.6. Дан прямоугольный параллелепипед с размерами 2м×4м×3м, $((x_0,y_0,\,z_0)=(2,4,3))$. Как изменится объем параллелепипеда, если изменить размеры: $(x,\;y,\;z)=(2{,}01;\,3{,}98;\,3{,}02)$.

$v=x\cdot y\cdot z$, $\Delta v=2{,}01\cdot 3{,}98\cdot 3{,}02-2\cdot 4\cdot 3=0{,}159$.

Из (36.7)$\Rightarrow \mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}(2,\ \ 4,\ \ 3)\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(2,\ \ 4,\ \ 3)\Delta y+\frac{\partial v}{\partial z}(2,\ \ 4,\ \ 3)\Delta z$, (36.9)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=yz\Big|_{(2,\ 4,\ 3)}=12;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=xz\Big|_{(2,\ 4,\ 3)}=6;\quad \frac{\partial v}{\partial z}=xy\Big|_{(2,\ 4,\ 3)}=8;$$

$\Delta x=0{,}01;\ \Delta y=-0{,}02;\Delta z=0{,}02$. Подставляя в формулу (36.9), получим $\mathrm{dv}=0{,}16$. Таким образом $\mathrm{d}v=0{,}16\approx 0{,}159=\Delta v$.

Задания к § 36 .

36.1. Найти частные производные следующих функций:

1) $z=\cos^2(x+2y)$; 2) $z=\ln(x\cdot y)$;

3) $z=x^y$; 4) $z=\mathrm{arctg}^3\,\frac{x}{y}$; 5) $z=\arcsin\frac{x+y}{x-y}$;

6) $z=\sqrt{3xy-y^2+x^2}$; 7) $z=5^{x^2-4y^3}$;

8) $z=y\cdot\sin(x\cdot e^{-y})$; 9) $u=\mathrm{arctg}\sqrt{x-4y^2}$;

10) $u=z^{yx}$; 11) $u=3^{xz}-\sin\frac{z}{2y}$; 12) $z=x^2\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)+x\cdot y$.

36.2. Найти частные производные функции в указанной точке $M_0(x_0;y_0)$:

1) $z=\sqrt{x}\cdot e^{-2y}$; $M_0(1;\,0)$; 2) $z=\arcsin\frac{x}{y}$; $M_0(1;\,2)$;

3) $z=x^2-y^2+5xy-2x$; $M_0(0;\,0)$; 4) $z=\sin(2x\cdot 3y)$; $M_0\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$;

5) $z=\frac{2x-3y}{4x+5y}$; $M_0(1;\,1)$; 6) $z=5^{\frac{y}{x}}$; $M_0(2;\,1)$;

7) $z=\mathrm{arcctg}\frac{3+xy}{y-x}$; $M_0(0;\,1)$; 8) $z=x^y$; $M_0(e;\,1)$;

9) $z=\ln\sqrt[3]{x^2+2y^2}$; $M_0(2;2)$; 10) $z=e^{x^2-5y^3}$; $M_0(2;\,1)$.

36.3. Найти дифференциалы указанных функций:

1) $z=\sin^2(x+2y)$; 2) $z=x^3\ln(2y^2x)$;

3) $z=2y-y^x$; 4) $z=7^{\frac{x}{4y}}$; 5) $z=y^2\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$;

6) $z=\operatorname{arctg}\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2y^2}}$.

Ответы.

36.1. 1) $z'_x=-\sin(x+2y);\ z'_y=-2\sin(x+2y)$;

2) $z'_x=\frac{1}{x};\ z'_y=\frac{1}{y}$; 3) $z'_x=yx^{y-1};\ z'_y=x^y\cdot\ln x$;

4) $z'_x=3\operatorname{arctg}^2\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x^2+y^2};\ z'_y=3\operatorname{arctg}^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-xy}{x^2+y^2}$;

5) $z'_x=\dfrac{-2y}{\sqrt{-\frac{2xy}{(x-y)^2}}\cdot(x-y)^2};\ z'_y=\dfrac{2x}{\sqrt{-\frac{2xy}{(x-y)^2}}\cdot(x-y)^2}$;

6) $z'_x=\dfrac{3y+2x}{2\sqrt{3xy-y^2+x^2}};\ z'_y=\dfrac{3x-2y}{2\sqrt{3xy-y^2+x^2}}$;

7) $z'_x=5^{x^2-4y^3}\cdot\ln5\cdot2x;\ z'_y=5^{x^2-4y^3}\cdot\ln5\cdot(-12y^2)$;

8) $z'_x=y\cos(x\cdot e^{-y})\cdot e^{-y};\ z'_y=\sin(x\cdot e^{-y})-yx\cos(x\cdot e^{-y})\cdot e^{-y}$;

9) $z'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x-4y^2}(1+x-4y^2)};\ z'_y=\dfrac{-4y}{\sqrt{x-4y^2}(1+x-4y^2)}$;

10) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot z^{yx}\cdot\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot z^{yx}\cdot\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=yx\cdot z^{yx-1}$;

11) $\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\ln3\cdot3^{xz}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\cos\frac{z}{2y}\cdot\frac{z}{2y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x\cdot\ln3\cdot3^{xz}-\cos\frac{z}{2y}\cdot\frac{1}{2y}$;

12) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)+y$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{y}+x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x^2}{z}$.

36.2. $z'_x(M_0)=\frac{1}{2};\ z'_y(M_0)=-2$; 2) $z'_x(M_0)=\frac{1}{\sqrt3};\ z'_y(M_0)=-\frac{1}{2\sqrt3}$;

3) $z'_x(M_0) = -2;\ z'_y(M_0) = 0$; 4) $z'_x(M_0) = -3;\ z'_y(M_0) = -\dfrac{\pi}{3}$;

5) $z'_x(M_0) = \dfrac{20}{81};\ z'_y(M_0) = -\dfrac{22}{81}$;

6) $z'_x(M_0) = -\dfrac{\sqrt{5}\ln 5}{4};\ z'_y(M_0) = \dfrac{\sqrt{5}\ln 5}{2}$;

7) $z'_x(M_0) = -0{,}4;\ z'_y(M_0) = 0{,}3$; 8) $z'_x(M_0) = 1;\ z'_y(M_0) = e$;

9) $z'_x(M_0) = \dfrac{1}{9};\ z'_y(M_0) = \dfrac{2}{9}$; 10) $z'_x(M_0) = \dfrac{4}{e};\ z'_y(M_0) = -\dfrac{15}{e}$.

36.3. 1) $dz = \sin(2x+4y)dx + 2\sin(2x+4y)dy$;

2) $dz = (3x^2\ln(2y^2x) + x^2)dx + \dfrac{2x^3}{y}dy$;

3) $dz = -y^x \cdot \ln y dx + (2 - xy^{x-1})dy$;

4) $dz = \dfrac{7^{\frac{x}{4y}} \cdot \ln 7}{4y}dx - \dfrac{7^{\frac{x}{4y}} \cdot \ln 7}{4y^2}dy$;

5) $dz = \dfrac{y}{\cos^2\frac{x}{y}}dx + \left(2y\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{\cos^2\frac{x}{y}}\right)dy$;

6) $dz = -\dfrac{y+xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}(2-2xy+2x^2y^2)}dx - \dfrac{x+yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}(2-2xy+2x^2y^2)}dy$.

37. Производные сложных функций.

Теорема 37.1. Пусть функции $x = x(t),\ y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, и $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке $a_0(x_0, y_0)$, причем $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$. Тогда функция $z = z(x(t), y(t))$ дифференцируема в точке t_0 и

$$z'_t(t_0) = z'_x(x_0,\ y_0) \cdot x'_t(t_0) + z'_y(x_0,\ y_0) \cdot y'_t(t_0). \qquad (37.1)$$

Доказательство. $z'_t(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{z(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t))-z(x(t_0),y(t_0))}{\Delta t}=$

$$=\left|\begin{matrix} x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x \\ y(t_0+\Delta t))-y(t_0)=\Delta y\end{matrix}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)}{\Delta t}=$$

$$=\left|\text{\textit{по формуле} } 36.6\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+z'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y)+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(z'_x(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+z'_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\Delta t}\right)=$$

$=z'_x(x_0,\ y_0)\cdot x'_t(t_0)+z'_y(x_0,\ y_0)\cdot y'_t(t_0)$, так как

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=0\cdot\sqrt{(x'_t(x_0,\ y_0))^2+(y'_t(x_0,\ y_0))^2}=0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, если функция $z=z(u,v)$ дифференцируема и функции $u=u(x,y), v=v(x,y)$ дифференцируемы, то функция $z=z(u(x,y),v(x,y))$ также дифференцируема и

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x\quad;$$
$$z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y. \tag{37.2}$$

Пример 37.1. $z=z(u,v)$, $u=x^2y^3$; $v=\dfrac{x^3}{y^2}$. Найти z'_x, z'_y.

Решение. По формулам (37.2) $z'_x=z'_u\cdot 2xy^3+z'_v\cdot\dfrac{3x^2}{y^2}$

$$z'_y=z'_u\cdot x^2\cdot 3y^2+z'_v\cdot x^3\cdot(-2)y^{-3}.$$

Пример 37.2. Решить уравнение $y\cdot z'_x-x\cdot z'_y=0$, введя новые переменные $\xi=x,\eta=x^2+y^2$, (см. [2], №3459).

Решение. $z'_x=z'_\xi\cdot 1+z'_\eta\cdot 2x$, $z'_y=z'_\xi\cdot 0+z'_\eta\cdot 2y$. Тогда

$$y \cdot z'_x - x \cdot z'_y = y \cdot z'_\xi + 2xyz'_\eta - 2xyz'_\eta = 0$$

$$y \cdot z'_\xi = 0,\ z'_\xi = 0.$$

Решение полученного уравнения $z'_\xi = 0$ будет: $z = \varphi(\eta) = \varphi(x^2 + y^2)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

Определение 37.1. Пусть $z = z(x, y)$ - дифференцируемая функция, определенная в некоторой окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$ точки $a_0(x_0, y_0)$ и $\vec{l}$ - произвольный ненулевой вектор; пусть $\vec{e} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ вектор единичной длины сонаправленный с $\vec{l}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to +0} \frac{z(a_0 + t \cdot \vec{e}) - z(a_0)}{t} = \frac{d}{dt}(z(a_0 + t \cdot \vec{e}))\Big|_{t=0} - \qquad (37.3)$$

называется производной по направлению $\vec{l}$ функции $z = z(x, y)$ в точке a_0.

Пусть $\vec{e}(\cos\alpha,\ \cos\beta)$ - координаты вектора $\vec{e}$, тогда $a_0 + t \cdot \vec{e} = (x_0 + t\cos\alpha;\ \ y_0 + t\cos\beta)$ и по формуле(37.1):

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + z'_y(x_0, y_0) \cdot \cos\beta. \qquad (37.4)$$

Определение 37.2. Вектор $(z'_x(x, y), z'_y(x, y))$ называется градиентом функции z и обозначается $\mathrm{grad}\, z$ или ∇z.

Из формулы (37.4) следует, что

$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = (\nabla z, \vec{e}) = |\nabla z| \cdot \cos\varphi$, где φ - угол между векторами ∇z и $\vec{l} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ принимает максимальное значение равное $|\nabla z|$, когда направление $\vec{l}$ совпадает с направлением градиента функции z. Если $\vec{l}$ - противоположно градиенту, то $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ - минимальное значение. Поэтому направление, заданное ∇z называется направлением наибольшего возрастания функции z, а $|\nabla z|$ - скоростью наибольшего возрастания z.

Пример 37.3. 1) Найти направление и скорость наибольшего возрастания функции $z = 2 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1, 1)$;

2) Найти $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$, где $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$; $M_1(4, -3)$.

Решение. 1) $\nabla z = (-2x; -2y)$,

$\nabla z\,(M_0) = (-2; -2)$; $|\nabla z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

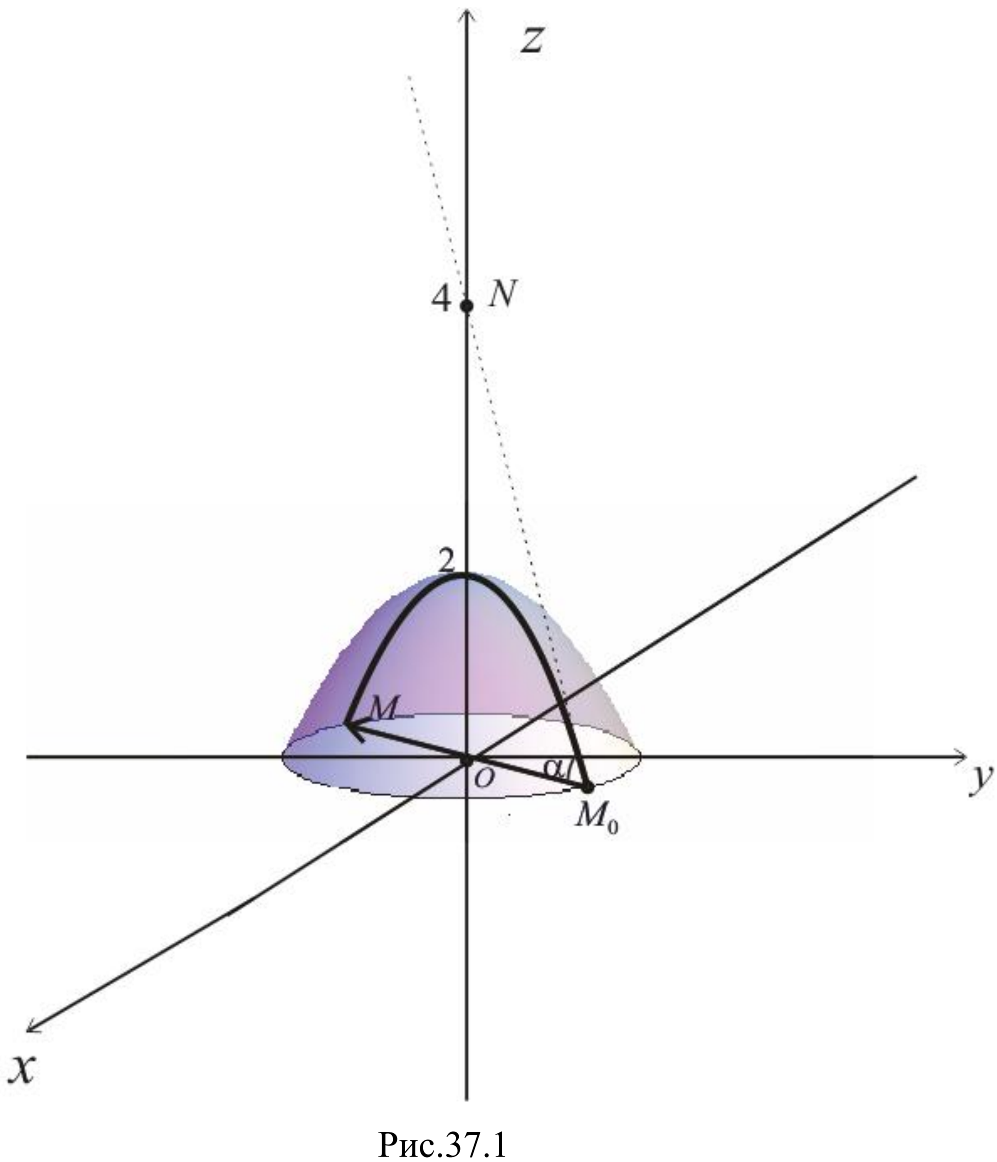


Рис.37.1

$M_0(1,1)$, $M(-1;\ -1)$, $\quad \nabla z = (-2,-2) = \overrightarrow{M_0M}$, $|\nabla z| = 2\sqrt{2}$

2) $\overrightarrow{M_0M_1}(3;-4)$; $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = 5$. $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{M_0M_1}}{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|} = \left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{4}{5}\right)$; по формуле (37.4): $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}} = -2\cdot\dfrac{3}{5} - 2\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{2}{5}$.

Пусть $z = z(x, y)$ - дифференцируема и

$$(x(t),\ y(t)),\ t \in R \ - \qquad (37.6)$$

линия уровня для поверхности $z = z(x, y)$; $z = z(x(t), y(t)) = c$, тогда по формуле(37.1)

$z'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + z'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = 0$,

поэтому вектор ∇z перпендикулярен линии уровня (37.6).

Найдём $\dfrac{\partial z}{\partial(\nabla z)}$. По формуле (37.1):

$\dfrac{\partial z}{\partial(\nabla z)} = \left(\nabla z, \dfrac{\nabla z}{|\nabla z|}\right) = |\nabla z| = \operatorname{tg}\alpha -$ наибольшая крутизна поверхности $z = z(x, y)$ в точке (x, y). По рисунку 37.1: кривая L на поверхности:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 2(1-t)^2;\ 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

M_0N - касательная к кривой L в точке M_0, $\quad tg\alpha = 2\sqrt{2}$.

Рассмотрим задачу нахождения минимума дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ с помощью градиентных методов. В этом случае рассматривая начальную точку $a_0(x_0, y_0)$, строят последовательные приближения к минимуму (точки $a_k(x_k, y_k)$), идя в направлении $-\nabla z$:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - \lambda_k \cdot \nabla z(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (37.7)$$

При этом λ_k выбирается либо постоянной(градиентный спуск с постоянным шагом), либо с дроблением шага. Процесс останавливают, если выполнено условие:

$\|(x_{k+1}, y_{k+1}) - (x_k, y_k)\| < \varepsilon$ или

$\|z(x_{k+1}, y_{k+1}) - z(x_k, y_k)\| < \varepsilon$.

Более подробное описание методов, а также условия, налагаемые на функцию $z = z(x, y)$ для сходимости метода см., например, в [12].

Рассмотрим метод наибыстрейшего спуска. Метод требует на каждом шаге решения задачи одномерной оптимизации, а именно λ_k выбирают находя минимум по λ функции:

$$z((x_k, y_k) - \lambda_k \cdot \nabla z(x_k, y_k)). \qquad (37.8)$$

Пример 37.4. $z = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 3 \to \min$.

Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Минимум по λ функции (37.8) найдем, например, в пакете Mathematica:

```
z[x_,y_]:=x^2+2*y^2+x*y+x+y-3
derzx[x_,y_]:=2*x+y+1
derzy[x_,y_]:=4*y+x+1
x:=0
y:=0
FindMinimum[z[x-l*derzx[x,y],y-l*derzy[x,y]],{l}]
```

```
{-3.25,{l→0.25}}
```

Таким образом $\lambda_0 = 0{,}25$. Используя формулу(37.7) строим таблицу:

k	x_k	y_k	λ_k
0	0	0	**0,25**
1	-0,25	-0,25	**0,5**
2	-0,375	-0,125	**0,25**
3	-0,40625	-0,1875	**0,25**

4	-0425782	-0,148438	**0,500026**
5	**-0,425782**	**-0,143555**	**0,249994**

и т.д., $z_{\min} = -3{,}28566$.

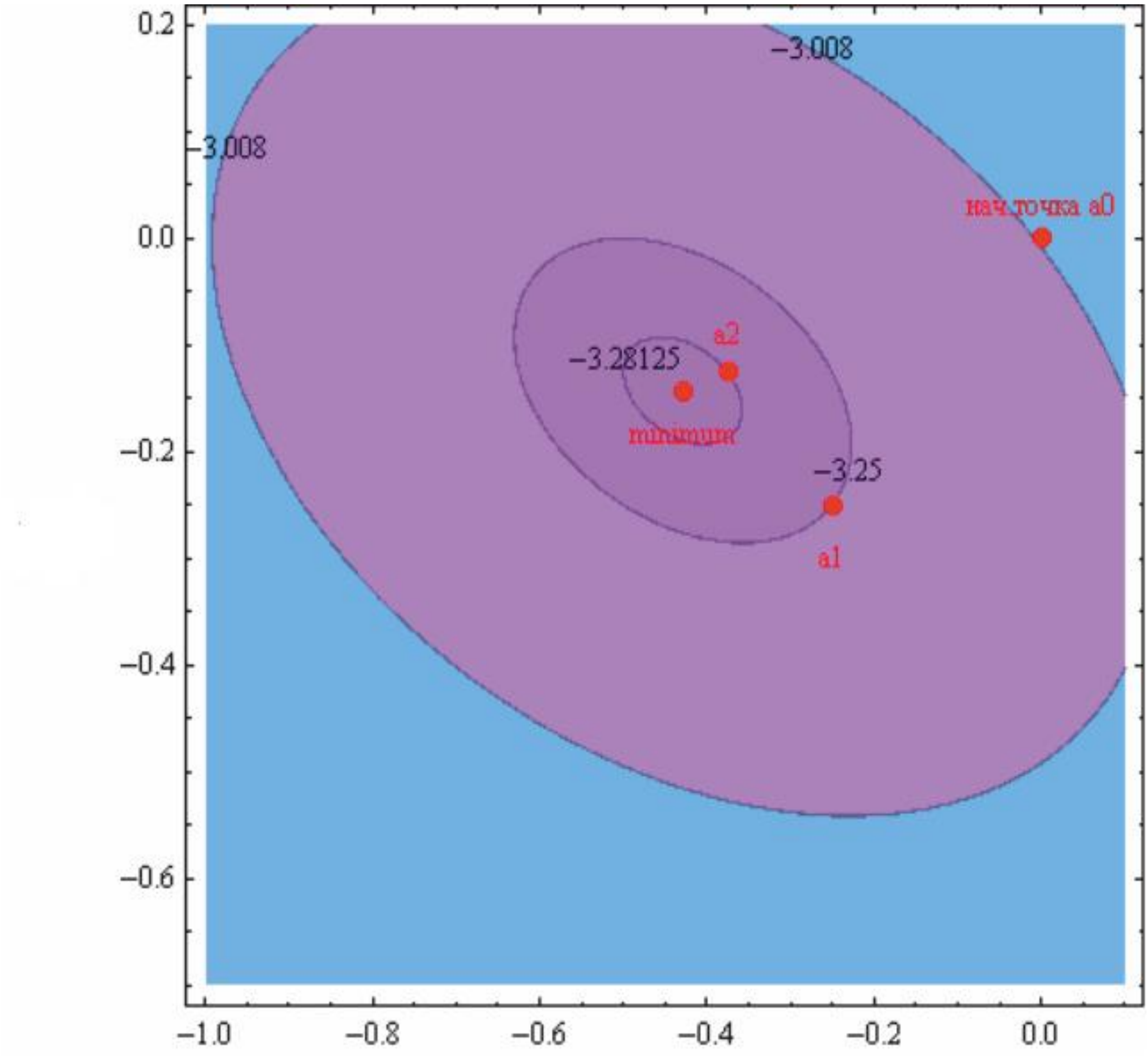


Рис. 37.2. $z_{\min} = -3{,}286$.

В стандартном методе наибыстрейшего спуска min (37.8) находят методом дихотомии или методом золотого сечения.

Нужно заметить, что функция FindMinimum в Mathematica вычисляет $z_{\min}$ и непосредственно:

$$\text{FindMinimum}[x\verb|^|2+2^* y\verb|^|2+x^* y+x+y-3,\{x,\ y\}]$$

$$\{-3.28571,\{x\to -0.428571, y\to -0.142857\}\}$$

$$z_{\min} = -3{,}28571.$$

Вычисления в программе FindMinimum проводятся по методу сопряженных градиентов Полака-Рибьеры.

Рассмотрим дифференцируемую функцию $z = z(x,\ y)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,\ y_0)$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,\ y_0)$ в точке $a_0(x_0,\ y_0)$. Из определения 36.1 следует, что функции одной переменной $z = z(x,\ y_0)$ и $z = z(x_0,\ y)$ имеют производные в точках x_0 и y_0 соответственно, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{dz(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0\,,\ y_0) \text{ и } \operatorname{tg}\beta = \left.\frac{dz(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0} = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0\,,\ y_0),$$

где α и β углы образованные касательными к кривым

$$\begin{cases} z = z(x,\ y) \\ y = y_0 \end{cases} \text{в точке } x_0 \text{ и } \begin{cases} z = z(x,\ y) \\ x = x_0 \end{cases} \text{ в точке } y_0.$$

Пример 37.5. Пусть $z = 2 - x^2 - y^2$, $a_0\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}; -\dfrac{1}{2}\right)$. Тогда

$$z'_x(a_0) = -2x\Big|_{x=\frac{1}{2\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \alpha = 150^\circ.$$

$$z'_y(a_0) = -2y\Big|_{y=-\frac{1}{2}} = 1;\quad \operatorname{tg}\beta = 1;\quad \beta = 45^\circ.$$

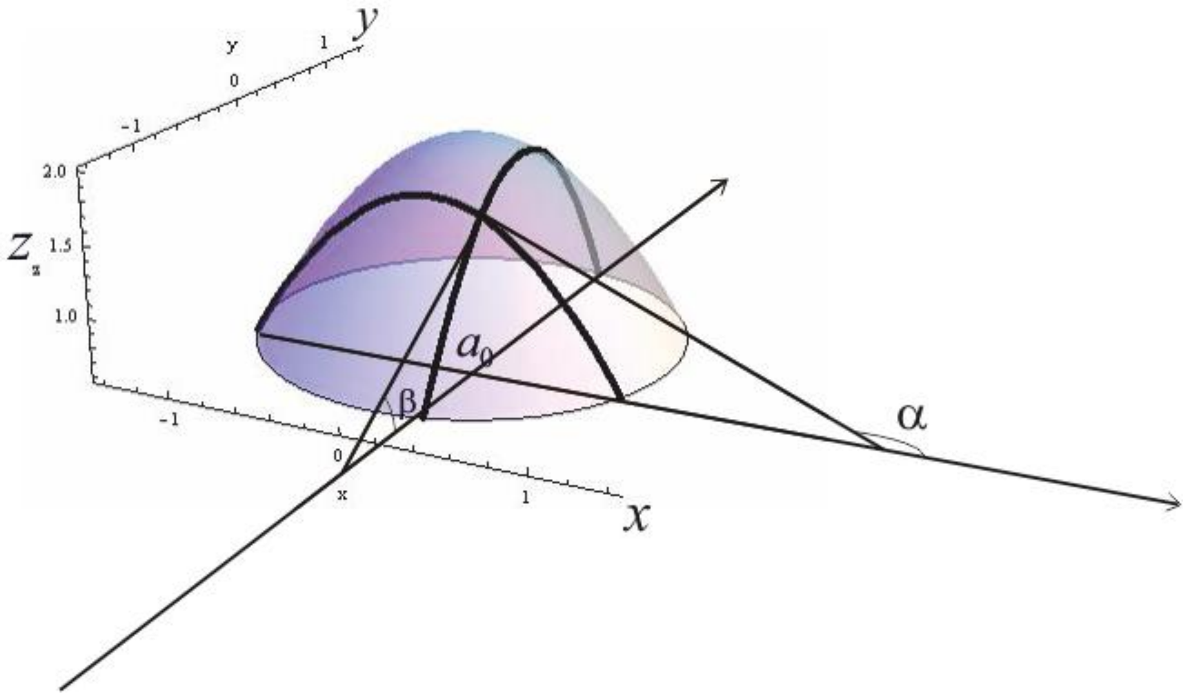


Рис. 37.3. $a_0\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\right)$ $,\alpha = 150^\circ,\ \beta = 45^\circ$.

Пусть $u = z(x, y) - z$ и $A_0(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ - точка на поверхности $u(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = z(x, y)$. Тогда

$$\nabla u(\,z'_x(x_0, y_0); z'_y(x_0, y_0); -1) \text{ -} \tag{37.9}$$

вектор перпендикулярный к поверхности $z = z(x, y)$.

Определение 37.3. Плоскость с вектором нормали (37.9), проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$ называется касательной плоскостью к поверхности $z = z(x, y)$.

Таким образом (см. формулу (11.3)):

$$z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \text{ -} \tag{37.10}$$

уравнение касательной плоскости.

Определение 37.4. Прямая с направляющим вектором (37.9), проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$ называется нормалью к поверхности $z = z(x, y)$.

Таким образом(см. формулу (12.3)):

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0\,, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0\,, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \text{ -} \qquad (37.11)$$

уравнение нормали.

Пример 37.6. Пусть $z = 2 - x^2 - y^2$, $a_0\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, $A_0\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Напишем уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2 - x^2 - y^2$ в точке A_0.

По формуле (37.9):

$\nabla u\big|_{a_0}(-2; 1; -1)$. Тогда (см.(37.10)):

$-2(x-1) + \left(y + \frac{1}{2}\right) - \left(z - \frac{3}{4}\right) = 0$ - касательная плоскость и

$\frac{x-1}{-2} = \frac{y + \frac{1}{2}}{1} = \frac{z - \frac{3}{4}}{-1}$ - нормаль (см.37.11).

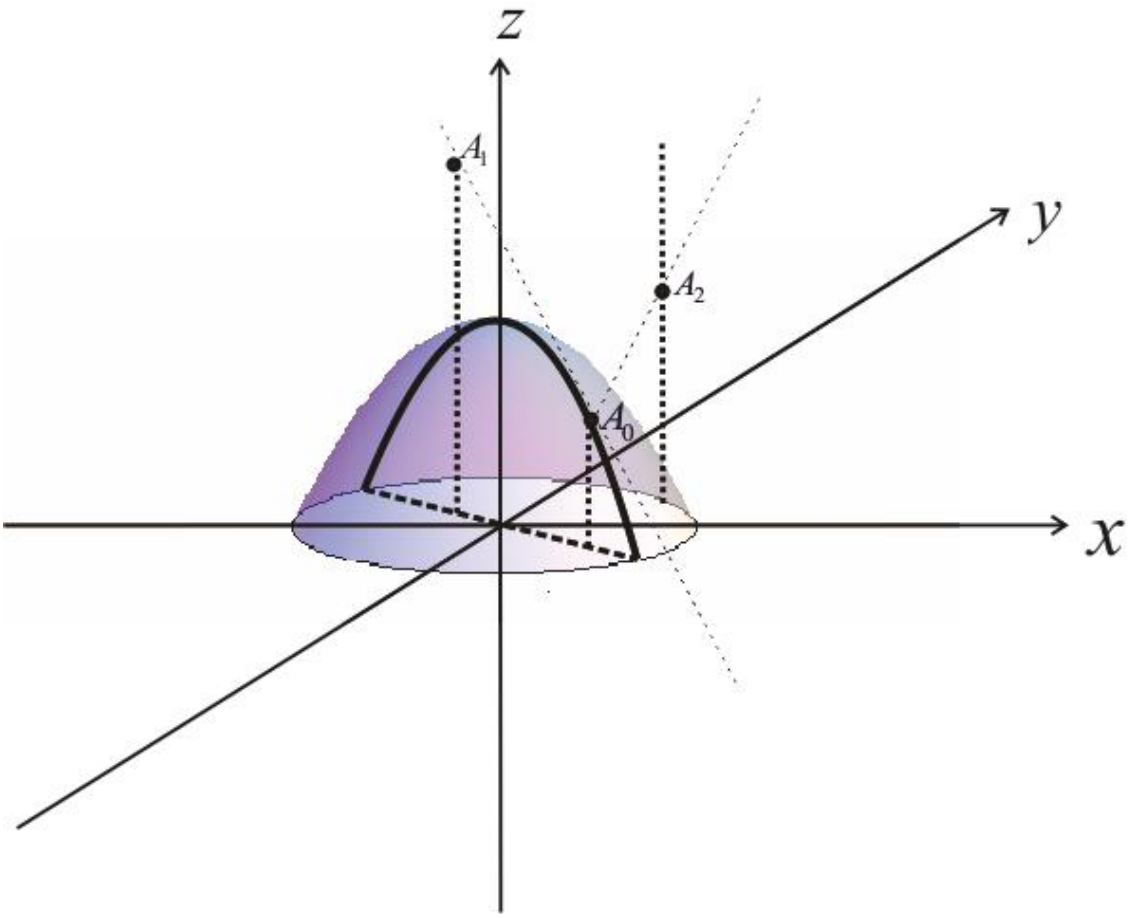


Рис. 37.4. Касательная плоскость к поверхности в

точке $A_0\left(1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$,(проходит через точки

$A_0\left(1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$, $A_1\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{9}{2}\right)$, $A_2\left(1;\ 1;\ \frac{9}{4}\right)$) .

Точки A_1 и A_2 выбраны произвольно, чтобы наглядно представить, как проходит касательная плоскость.

Из формул (37.10):

$$z_{кас} - z_0 = z'_x(x_0\,,\ y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0\,,\ y_0)(y - y_0)$$

и (36.7): $dz = z'_x(x_0\,,\ y_0)\Delta x + z'_y(x_0\,,\ y_0)\Delta y$ следует, что $dz = z_{кас} - z_0$.

Пример 37.7. Пусть $z = 2 - x^2 - y^2$, $a_0\left(1; -\frac{1}{2}\right)$,

$z(a_0)=\frac{3}{4}$; $A_0\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$; $z_{кас}-\frac{3}{4}=-2(x-1)+\left(y+\frac{1}{2}\right)$ - касательная плоскость к поверхности $z=2-x^2-y^2$ в точке А(см. пример 37.6).

Пусть, например, $a_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $z_{кас}(a_1)=\frac{9}{2}$; $A_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{9}{2}\right)$

$dz=-2x\Delta x-2y\Delta y$; $dz(a_0)=-2\Delta x+\Delta y$;

$$dz(a_0)\Big|_{\substack{\Delta x=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}\\ \Delta y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}}}=-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}.$$

$$z_{кас}-z_0=\frac{9}{2}-\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}=dz(a_0)=a_1A_1-a_1A_3 \text{ (см. рис.37.5).}$$

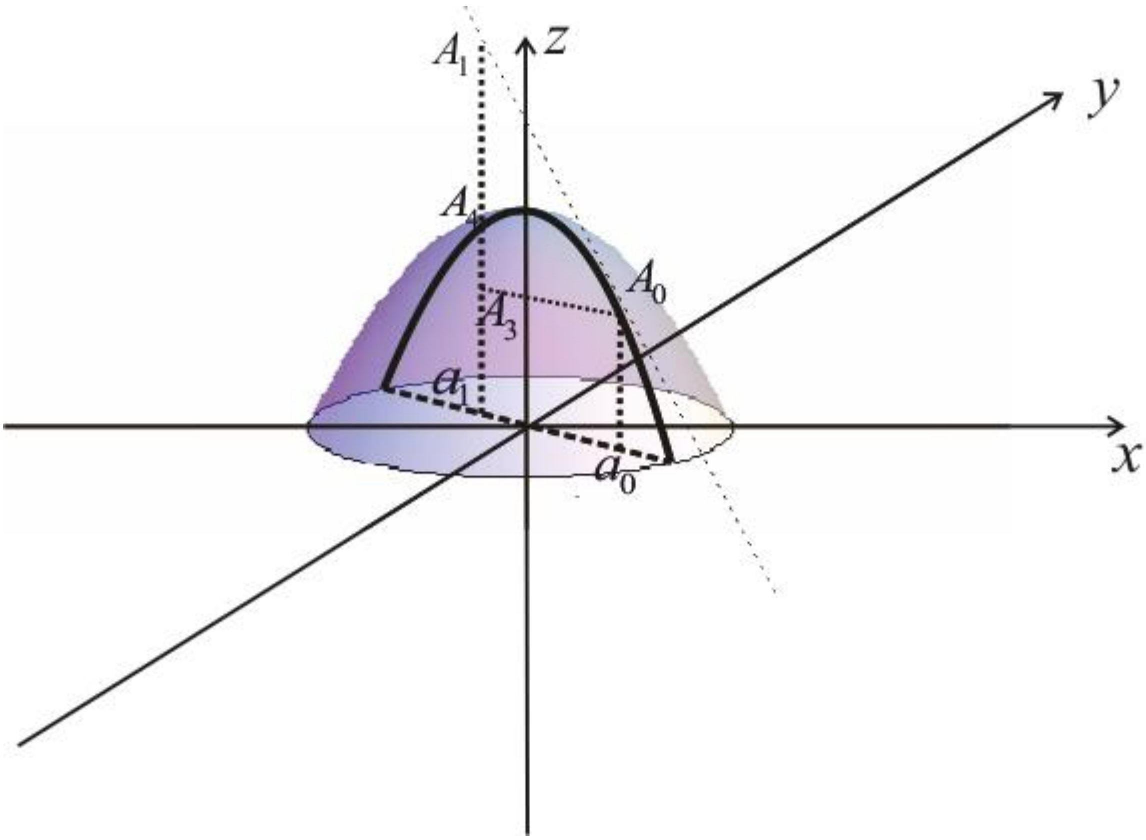


Рис.37.5. $a_0\left(1; -\frac{1}{2}\right), dz(a_0)\Big|_{\substack{\Delta x=-\frac{3}{2}\\ \Delta y=\frac{3}{4}}}=|a_1A_1|-|a_1A_3|=3\frac{3}{4}$

$$|a_0A_0| = |a_1A_3|; \quad \Delta z = |a_1A_4| - |a_1A_3|; \quad o(\rho) = |a_1A_4| - |a_1A_1|.$$

Задания к § 37 .

37.1. Найти частные производные сложной функции $z = z(u,\, v)$.

1) $z = \dfrac{u}{2v},\, u = x + y,\, v = y\cos x;$

2) $z = \ln(uv),\, u = \sqrt{x^2 + y^2},\, v = \dfrac{y}{x};$

3) $z = e^{u-2v},\, u = \ln(y - x),\, v = x \cdot y^2;$

4) $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2u}{v}\right),\, u = \dfrac{x^2}{y-2},\; v = \dfrac{x}{y}.$

37.2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в заданной точке $M_0(x_0; y_0;\, z_0)$.

1) $z = x^2 + 2y^2,\; M_0(1; -1; 3);$

2) $z = x^2 + 4xy + y^2 - 2y,\; M_0(1; 1; 4);$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\; M_0(2; -2; 2);$

4) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{8} = 1,\; M_0(3; 2; 2\sqrt{2});$

5) $x^2 + y^2 - 2z = 0,\; M_0(1; 1; 1);$

6) $z^2 - xy = 0,\; M_0(1; 2; \sqrt{2}).$

37.3. Найти производную по направлению вектора $\vec{s}$ и градиент функции $u = u(x,\, y,\, z)$ в заданной точке $M_0(x_0; y_0;\, z_0)$.

1) $u = x^{yz},\, M_0(e,\, 2,\, 1),\, \vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k};$

2) $u = y\ln(x^2 z),\, M_0(1,\, 1,\, 2),\, \vec{s} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k};$

3) $u = \dfrac{2yx}{z^2},\, M_0(1,\, 2,\, -1),\, \vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k};$

4) $u=\dfrac{x-2y}{x+z}$, $M_0(0,3,2)$, $\vec{s}=5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;

5) $u=9^{\frac{x}{2z}}+y^2x^2$, $M_0(1,1,-1)$, $\vec{s}=4\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;

6) $u=\sin(zy)\cdot x^2$, $M_0(1,1,\pi)$, $\vec{s}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

Ответы

37.1. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos x+\sin x(x+y)}{2y\cos^2 x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{2y^2\cos x}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{x^3+xy^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y^2-1}{x^2y+y^3}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{-2xy^2}(2xy^2-2y^3-1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-2xy^2}(1-4xy^2-4x^2y)$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4x}{5y^2-4y+1}$.

37.2. 1) $2x-4y-z+5=0,\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$;

2) $6x+4y-z-6=0,\ \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-4}{-1}$;

3) $x-y+z-6=0,\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{4}$;

4) $4x-2y+\sqrt{2}z-12=0,\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

5) $x+y-z-1=0,\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$;

6) $2x+y-2\sqrt{2}z=0,\ \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

37.3. 1) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_0}=\dfrac{2e}{\sqrt{6}}$, $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_{M_0}=2e\vec{i}+e^2\vec{j}+2e^2\vec{k}$;

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_0}=\dfrac{5+7\ln 2}{\sqrt{101}}$, $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_{M_0}=2\vec{i}+\ln 2\,\vec{j}+\dfrac{1}{2}\vec{k}$;

3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_0}=-\dfrac{22}{\sqrt{21}}$, $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_{M_0}=4\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$;

4) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_0}=\dfrac{25}{3\sqrt{3}}$, $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_{M_0}=2\vec{i}-\vec{j}+\dfrac{3}{2}\vec{k}$;

5) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_0}=\dfrac{7\ln 9+18}{18\sqrt{2}}$, $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_{M_0}=\dfrac{\ln 9+3}{3}\vec{i}+2\vec{j}-\dfrac{\ln 9}{6}\vec{k}$;

6) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_0}=-\dfrac{1}{3}$, $\left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|_{M_0}=-\vec{j}-\vec{k}$.

38.Неявно заданные функции.

Определение 38.1. Пусть функция $y = y(x)$ определена в некоторой окрестности $O_{\delta_1}(x_0)$ точки x_0, а функция $F(x, y)$ в окрестности $O_{\delta_2}(x_0, y_0)$, где $y(x_0) = y_0$ и пусть $\forall x \in O_{\delta_1}(x_0)$ $(x, y(x)) \in O_{\delta_2}(x_0, y_0)$. Если $\forall x \in O_{\delta_1}(x_0)$

$$F(x, y(x)) = 0, \tag{38.1}$$

то говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает функцию $y(x)$ неявно.

Предположим, что $F(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), и $y(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда по формуле (37.1):

$$F(x, y(x))' = 0' = 0.$$

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{38.2}$$

При этом мы предполагали, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Пример 38.1. Рассмотрим уравнение:

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ и точку $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Решение. По формуле (38.2):

$y'(1) = -\left.\frac{2x}{2y}\right|_{(1,1)} = -1$. Выразим y из уравнения $x^2 + y^2 - 2 = 0$:

$y(x) = \sqrt{2 - x^2}$, $x \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$; $y'(1) = -1$.

В общем случае существование функции $y = y(x)$ задается теоремой:

Теорема 38.1. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ непрерывные в точке (x_0, y_0), причем:

$$F(x_0 \ , y_0) = 0, \quad F'_y(x_0 \ , y_0) \neq 0,$$

то существует окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, такая что $\forall x \in O_\delta(x_0)$ $\exists$ единственное решение $y = y(x)$ уравнения (38.1), функция $y = y(x)$ непрерывна $\forall x \in O_\delta(x_0)$ и $y_0 = y(x_0)$. При этом $y'(x_0)$ находится по формуле (38.2).

Пример 38.2. $F(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 = 0$; $F(1, 1) = 0$. Проверить выполнение условий теоремы 38.1 и найти $y'(1)$.

Решение. $F(x, y)$ непрерывна; $F'_x(x) = 2x + y$; $F'_y(x) = x - 4y$ непрерывны; $F'_y(1,1) \neq 0 \Rightarrow$ условия теоремы 38.1 выполнены, поэтому уравнение задает функцию $y = y(x)$, и по формуле (38.2):

.

Определение 38.2. Пусть функция $z = z(x, y)$ определена в некоторой окрестности $O_{\delta_1}(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), а функция $F(x, y, z)$ в окрестности $O_{\delta_2}(x_0, y_0, z_0)$, где $z(x_0, y_0) = z_0$ и пусть $\forall (x, y) \in O_{\delta_1}(x_0, y_0)$ $(x, y, z(x, y)) \in O_{\delta_2}(x_0, y_0, z_0)$. Если $\forall x \in O_{\delta_1}(x_0, y_0)$

$$F(x, y, z(x, y)) = 0, \tag{38.3}$$

то говорят, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию $z(x, y)$ неявно.

Аналогично теореме 38.1 верна теорема:

Теорема 38.2. Пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и имеет в этой окрестности частные производные $F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ непрерывные в точке (x_0, y_0, z_0), причем:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0,\ F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то существует окрестность $O_\delta(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), такая что $\forall (x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$ $\exists$ единственное решение $z = z(x, y)$ уравнения (38.3), функция $z = z(x, y)$ непрерывна $\forall (x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$ и $z_0 = z(x_0, y_0)$. При этом $z'_x(x_0, y_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$ находятся по формулам:

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},\ z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (38.4)$$

Более подробно см. [1], [11]. Подставим формулу (38.2) в уравнение касательной (9.2). После преобразования получим:

$$F_x{}'(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \text{ -} \qquad (38{,}5)$$

уравнение касательной к кривой в точке (x_0, y_0) заданной неявно.

Аналогично, после подстановки (38.4) в формулы (37.10), (37.11) получим:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \text{ -} \qquad (38.6)$$

уравнение касательной плоскости к гладкой поверхности заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0) и

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \text{ -} \qquad (38.7)$$

уравнение нормали.

Пример 38.3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + 4z^2 = 49$ в точке (2, 3, 3).

Решение. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 49 = 0$

$F'_x = 2x;\ F'_y = 2y;\ F'_z = 8z;\ F'_x(2, 3, 3) = 4;\ F'_y(2, 3, 3) = 6;\ F'_z(2, 3, 3) = 24.$

По формулам (38.6), (38.7):

$4(x - 2) + 6(y - 3) + 24(z - 3) = 0$ - касательная плоскость;

$\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y - 3}{6} = \dfrac{z - 3}{24}$ - нормаль.

Задания к § 38 .

38.1. Найти частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной в неявном виде.

1) $2x^2 - \sin(x + y) = 5z$;

2) $3xy + e^{zy} = 8$;

3) $y^3 - 5xy + z^2 = 0$;

4) $xyz - zy - zx + xy = 2$;

5) $\cos^2 y - 4x + z^3 = 0$;

6) $y\sin x - x\cos z = zy$;

7) $z^3 - \ln\dfrac{y}{x} + 2y = 6z$;

8) $x^2 z^2 - e^{2y} + 4z = 0$;

9) $5z^2 x + 4y^3 - \ln xz = 0$;

10) $16y^3 x - e^{8z^2} - x = 4$.

38.2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в заданной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

1) $z = x^2 + 2y^2$, $M_0(1; -1; 3)$;

2) $z = x^2 + 4xy + y^2 - 2y$, $M_0(1; 1; 4)$;

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $M_0(2; -2; 2)$;

4) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{8} = 1$, $M_0(3; 2; 2\sqrt{2})$;

5) $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $M_0(1; 1; 1)$;

6) $z^2 - xy = 0$, $M_0(1; 2; \sqrt{2})$.

Ответы.

38.1. 1) $z'_x = \dfrac{\cos(x + y) - 4x}{5}$; $z'_y = \dfrac{\cos(x + y)}{5}$;

2) $z'_x = -3e^{-zy}$; $z'_y = -\dfrac{3e^{-zy} + z}{y}$;

3) $z'_x = \dfrac{5y}{2z}$; $z'_y = \dfrac{5x - 3y^2}{2z}$;

4) $z'_x = \dfrac{yz - z + y}{x + y - xy}$; $z'_y = \dfrac{xz - z + x}{x + y - xy}$;

5) $z'_x = \dfrac{4}{3z^2}$; $z'_y = \dfrac{\sin 2y}{3z^2}$;

6) $z'_x = \dfrac{y\cos x - \cos z}{y - x\sin z}$; $z'_y = \dfrac{\sin x - z}{y - x\sin z}$;

7) $z'_x = \dfrac{1}{6x - 3z^2 x}$; $z'_y = \dfrac{2y - 1}{6y - 3z^2 y}$;

8) $z'_x = -\dfrac{xz^2}{zx^2 + 2}$; $z'_y = \dfrac{e^{2y}}{zx^2 + 2}$;

9) $z'_x = \dfrac{5z^3 x - z}{x - 10z^2 x^2}$; $z'_y = \dfrac{12y^2 z}{1 - 10z^2 x}$;

10) $z'_x = \dfrac{16y^3 - 1}{16ze^{8z^2}}$; $z'_y = \dfrac{3y^2 x}{ze^{8z^2}}$.

38.2. 1) $2x - 4y - z + 5 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{-1}$;

2) $6x + 4y - z - 6 = 0$, $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-4}{-1}$;

3) $x - y + z - 6 = 0$, $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-2}{4}$;

4) $4x - 2y + \sqrt{2}z - 12 = 0$, $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$;

5) $x + y - z - 1 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$;

6) $2x + y - 2\sqrt{2}z = 0$, $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

39. Частные производные высших порядков.

Определение 39.1. Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет частные производные $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Частные производные от функций $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ называются частными производными второго порядка от функции $z(x, y)$.

Таким образом:

$z''_{xx} = (z'_x(x, y))'_x$; другое обозначение для z''_{xx} : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

$z''_{yy} = (z'_y(x, y))'_y$; другое обозначение для z''_{yy} : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

$z''_{xy} = (z'_x(x, y))'_y$; другое обозначение для z''_{xy} : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$z''_{yx} = (z'_y(x, y))'_x$; другое обозначение для z''_{yx} : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными частными производными.

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Например,

$$z'''_{xxy} = (z''_{xx})'_y = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Пример 39.1. $z = \sin(x^2 \cdot y)$. Найдем частные производные второго порядка.

$$z'_x = \cos(x^2 \cdot y) \cdot 2xy;\ z'_y = \cos(x^2 \cdot y) \cdot x^2;$$

$$z''_{xx} = (-\sin(x^2 \cdot y) \cdot 2xy) \cdot 2xy + \cos(x^2 \cdot y) \cdot 2y;$$

$$z''_{yy} = ((-\sin(x^2 \cdot y) \cdot x^2) \cdot x^2 = -\sin(x^2 \cdot y) \cdot x^4;$$

$$z''_{xy} = ((-\sin(x^2 \cdot y) \cdot x^2) \cdot 2xy + \cos(x^2 \cdot y) \cdot 2x;$$

$$z''_{yx}=((-\sin(x^2\cdot y)\cdot 2xy)\cdot x^2+\cos(x^2\cdot y)\cdot 2x$$

В примере 39.1 z''_{xy} = z''_{yx}. В частности, если все производные, входящие в вычисление – непрерывны, то результат не зависит от последовательности дифференцирования. Точнее говоря, верна теорема:

Теорема 39.1. Пусть функция $z=z(x,\,y)$ определена вместе со своими частными производными z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и пусть z''_{xy} и z''_{yx} - непрерывны в этой точке. Тогда $z''_{xy}(x_0,y_0)=z''_{yx}(x_0,y_0)$ (см.[1, §23]).

Упражнение 39.1. $z=\sin(x^2\cdot y)$. Найти z'''_{xyx}, z'''_{yxx}, z'''_{xxy}.

Пример 39.2. $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0\\ 0,\ x^2+y^2=0.\end{cases}$

Найти $z'_{xx}(0,\,0),\ z'_{xy}(0,\,0)$.

Решение.

$$z'_{xx}(0,\,0)=\lim_{x\to 0}\frac{z'_x(x,0)-z'_x(0,0)}{x}. \tag{39.1}$$

$$z'_{xy}(0,\,0)=\lim_{y\to 0}\frac{z'_x(0,y)-z'_x(0,0)}{y}. \tag{39.2}$$

Функция $z(x,\,0)=0,\ \forall x\in R$, поэтому $z'_x(x,\,0)=0;\ z'_x(0,\,0)=0$; из (39.1) $\Rightarrow$ $z'_{xx}(0,\,0)=0$.

Если $x^2+y^2\neq 0$, то

$$z'_x(x,\,y)=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

$z'_x(x,\ \ y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ Поэтому $z'_x(0,\,y)=\dfrac{1}{y}$. Из (39.2) $\Rightarrow$

$z'_{xy}(0,\,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{1}{y}}{y}=\infty$. Таким образом $z'_{xy}(0,\,0)$ не существует.(см. 3230.1 в [2] ; 4.3 в [10]).

Упражнение 39.2. Для функции $z(x,\,y)$ из примера 39.2 найти $z''_{yy}(0,\,0),\ z''_{yx}(0,\,0)$.

Пример 39.3. $z=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0\\ 0,\ x^2+y^2=0.\end{cases}$

Найти $z''_{yx}(0,0)$.

Решение.

$$z'_{yx}(0,\,0)=\lim_{x\to 0}\frac{z'_y(x,0)-z'_y(0,0)}{x} \qquad (39.3)$$

$$z(0,\,y)=0,\ \forall y\in R\Rightarrow z'_y(0,\,y)=z'_y(0,\,0)=0$$

$$z'_y(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\ x^2+y^2\neq 0\\ 0,\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Из (39.3) $\Rightarrow z'_{yx}(0,\,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1$.

Упражнение 39.3. Для функции $z(x,\,y)$ из примера (39.3) найти $z''_{xy}(0,\,0)$. (см. 3230 в [2]; 4.4 в [10]).

Определение 39.2. Пусть $z=z(x,\,y)$ - дифференцируемая функция и

$$dz=z'_x(x,\,y)dx+z'_y(x,\,y)dy \qquad (39.4)$$

ее дифференциал (первый дифференциал). Дифференциал от первого дифференциала функции z при фиксированных dx и dy называется вторым дифференциалом и обозначается d^2z. Таким образом, $d^2z=d(dz)$. Аналогично, $d^nz=d(d^{n-1}z)$.

Найдем d^2z. Из (39.4) $\Rightarrow d^2z=d(z'_x(x,\,y)dx+z'_y(x,\,y)dy)=$

$$= d(z'_x(x, y)) \cdot dx + d(z'_y(x, y)) \cdot dy = (z''_{xx}(x, y)dx + z''_{xy}(x, y)dy)dx +$$
$$+ (z''_{yx}(x, y)dx + z''_{yy}(x, y)dy)dy =$$
$$= z''_{xx}(x, y)dx^2 + 2z''_{xy}(x, y)dxdy + z''_{yy}(x, y)dy^2. \qquad (39.5)$$

При этом для переменных x и y выбирались такие же приращения dx и dy, что для первого дифференциала.

Таким образом для дважды непрерывно-дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ верна формула (39.5).

В общем случае, если $z(x, y)$ n раз непрерывно-дифференцируема, то $d^n z$ представляется в виде символической формулы:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^n z(x, y). \qquad (39.6)$$

Пример 39.4. $z = x^3 y^2$. Найти $d^2 z$.

Решение. $z'_x = 3x^2 y^2$, $z'_y = 2x^3 y$, $z''_{xx} = 6xy^2$, $z''_{xy} = 6x^2 y$, $z''_{yy} = 2x^3$.

По формуле (39.5):

$$d^2 z = 6xy^2 \cdot dx^2 + 12x^2 ydxdy + 2x^3 dy^2.$$

Упражнение 39.4. $z = \ln(x^2 + y^2)$. Показать, что z удовлетворяет уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Теорема 39.2. Пусть для функция $z = z(x, y)$ определены и непрерывны частные производные до порядка m, $(m \ge 1)$, в некоторой окрестности $O_\delta(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) и пусть эти частные производные непрерывны в этой окрестности. Тогда для $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$ верна формула:

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)\Delta y^2\right) + \ldots + \qquad (39.7)$$

$$+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^m z(x_0,\quad y_0)+o(\rho^m)$$, где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$,

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, и функция $o(\rho^m)$ – бесконечно-малая более высокого порядка малости, чем ρ^m при $\rho\to 0$, $\left(\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho^m)}{\rho^m}=0\right)$.

Формула (39.7) называется формулой Тейлора m - го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

Если $(x_0,y_0)=(0,\,0)$, то формула (39.7) называется формулой Маклорена.

Пример 39.5. $z=\sin(x+y^2)$. Разложить функцию по формуле Тейлора до 3-ого порядка включительно в точке $\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)$.

Решение. $z\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)=1$; $z'_x=\cos(x+y^2)$, $z'_y=\cos(x+y^2)\cdot 2y$;

$z'_x\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)=0$, $z'_y\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)=0$; $z''_{xx}=-\sin(x+y^2)$, $z''_{xy}=-\sin(x+y^2)\cdot 2y$;

$z''_{yy}=-\sin(x+y^2)\cdot 4y^2+2\cos(x+y^2)$;

$z''_{xx}\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)=-1$, $z''_{xy}\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)=0$; $z''_{yy}\left(\frac{\pi}{2};\,0\right)=0$.

$z'''_{xxx}=-\cos(x+y^2)$, $z'''_{xxy}=-\cos(x+y^2)\cdot 2y$;

$z'''_{xyy}=-\cos(x+y^2)\cdot 4y^2-\sin(x+y^2)\cdot 2$;

$z'''_{yyy}=-\cos(x+y^2)\cdot 8y^3-8y\cdot\sin(x+y^2)-2\sin(x+y^2)\cdot 2y$;

$z'''_{xxx}\left(\frac{\pi}{2};\quad 0\right)=0$, $z'''_{xxy}\left(\frac{\pi}{2};\quad 0\right)=0$; $z'''_{xyy}\left(\frac{\pi}{2};\quad 0\right)=-2$; $z'''_{yyy}\left(\frac{\pi}{2};\quad 0\right)=0$.

По формуле (39.7):

$$\sin(x+y^2)=1+\frac{1}{2}\left(-1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{6}\left(-6\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y^2\right)+o\left(\left(\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2}\right)^3\right)$$

Упражнение 39.5. $z=x^2\cdot y;\ x_0=1;\ y_0=0$. Разложить по формуле Тейлора.

Формулу Тейлора можно использовать в приближенных вычислениях функций. При этом $o(\rho^m)$ отбрасывают.

Пример 39.6. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}05^2+2{,}94^2}$.

Пусть в (39.7) $m=1$, тогда:

$z(x,\ y)\approx z(x_0,\ y_0)+z'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+z'_y(x_0,\ y_0)\Delta y$.

Пусть $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $(x_0,y_0)=(4,\ 3)$;

$$z(4,\ 3)=\sqrt{4^2+3^2}=5;\ z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ z'_x(4,\ 3)=\frac{4}{5};\ z'_y(4,\ 3)=\frac{3}{5};$$

$$z(4{,}05;\ 2{,}94)\approx 5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}\cdot(-0{,}06)=5{,}004.$$

Задания к § 39 .

39.1. Найти частные производные второго порядка от указанной функции.

1) $z=\ln(4x^2-y^2)$, 2) $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2y}$, 3) $z=e^{x^2\cdot y}$,

4) $z=\arccos(2y+5x)$. 5) $z=\frac{xy}{x+y}$, 6) $z\sin\sqrt{xy}$.

39.2. Найти дифференциал второго порядка.

1) $z=x^2y+y^3x$. 2) $z=\ln xy$, 3) $z\cos(x^3-y^3)$,

4) $z=x^y$. 5) $z=(x^2+y^2)^2$, 6) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

39.3. Вычислить приближенно:

1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sin 32^0 \cos 59^0$; 3) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$.

39.4. Разложить по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно функцию $f(x,\ y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

39.5. Разложите функцию $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 5y + 5$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ -2)$.

Ответы.

39.1. 1) $z''_{xx} = -\dfrac{64x^2 + 8y^2}{(4x^2 - y^2)^2}$, $z''_{yy} = -\dfrac{8x^2 + 2y^2}{(4x^2 - y^2)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{16xy}{(4x^2 - y^2)^2}$.

2) $z''_{xx} = -\dfrac{\sin\dfrac{x}{2y}}{2y^2\cos^3\dfrac{x}{2y}}$, $z''_{yy} = \dfrac{2x\cos\dfrac{x}{2y} + x\sin\dfrac{x}{2y}}{y^4\cos^3\dfrac{x}{2y}}$,

$$z''_{xy} = -\frac{x\sin\dfrac{x}{2y} + y\cos\dfrac{x}{2y}}{2y^3\cos^3\dfrac{x}{2y}}.$$

3) $z''_{xx} = 2e^{x^2y}(y + 2x^2y^2)$, $z''_{yy} = x^4 \cdot e^{x^2y}$, $z''_{xy} = 2e^{x^2y}(x + x^3y)$.

4) $z''_{xx} = -\dfrac{50y + 125x}{(1 - (2y + 5x)^2)^{3/2}}$, $z''_{yy} = -\dfrac{8y + 20x}{(1 - (2y + 5x)^2)^{3/2}}$,

$$z''_{xy} = -\frac{20y + 50x}{(1 - (2y + 5x)^2)^{3/2}}.$$

5) $z''_{xx} = -\dfrac{2y^2}{(x + y)^3}$, $z''_{yy} = -\dfrac{2x^2}{(x + y)^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{2xy}{(x + y)^3}$.

6) $z''_{xx} = -\dfrac{1}{2}\sin\sqrt{xy} \cdot \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4}\cos\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$,

$$z''_{yy} = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{xy} \cdot \frac{x}{y} - \frac{1}{4}\cos\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{x}{y^3}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{xy} + \frac{1}{4}\cos\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

39.2. 1) $d^2 z = 2ydx^2 + (4x + 6y^2)dxdy + 6xydy^2$.

2) $d^2 z = -\dfrac{dx^2}{x^2} - \dfrac{dy^2}{y^2}$.

3) $d^2 z = (6x\sin(y^3 - x^3) - 9x^4\cos(x^3 - y^3))dx^2 + 18x^2 y^2 \cos(x^3 - y^3)dxdy +$

$+ (6y\sin(x^3 - y^3) - 9y^4\cos(x^3 - y^3)dy^2$.

4) $d^2 z = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2x^{y-1}(y\ln x + 1)dxdy + x^y \ln^2 xdy^2$.

5) $d^2 z = (12x^2 + 4y^2)dx^2 + 16xydxdy + (4x^2 + 12y^2)dy^2$.

6) $d^2 z = \dfrac{2x^2 + y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}dx^2 + \dfrac{2xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}dxdy + \dfrac{2y^2 + x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}dy^2$.

39.3. 1) 1,08; 2) 0,273; 3) 1,05.

39.4. $(1 - x^2 - y^2)^{1/2} \approx 1 - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - \dfrac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$.

39.5. $f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

40.Экстремумы.

Определение 40.1. Пусть $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция определенная на R^n со значениями во множестве действительных чисел R.

Точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется точкой локального максимума(минимума) функции u, если существует такая окрестность $O_\delta(x^0)$, что

$$\forall x \in O_\delta(x^0):\ u(x^0) > u(x)\ \ (u(x^0) < u(x)). \qquad (40.1)$$

Если неравенства в формуле(40.1) – нестрогие, то говорят о нестрогом максимуме(минимуме). Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума.

Теорема 40.1. (необходимое условие экстремума). Если функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки экстремума $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, то частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0)$ равны 0 или не существуют, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной x_i:

$u = u(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$. Для этой функции точка x_i^0 является точкой экстремума. Если u имеет в точке x_i^0 - производную, то согласно теореме 12.1

$$\frac{d}{dx_i}u(x_1^0, \ \dots\ , \ x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ \dots\ , x_n^0)\Bigg|_{x_i = x_0^0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = 0,$$ что и требовалось доказать (см. определение 36.1).

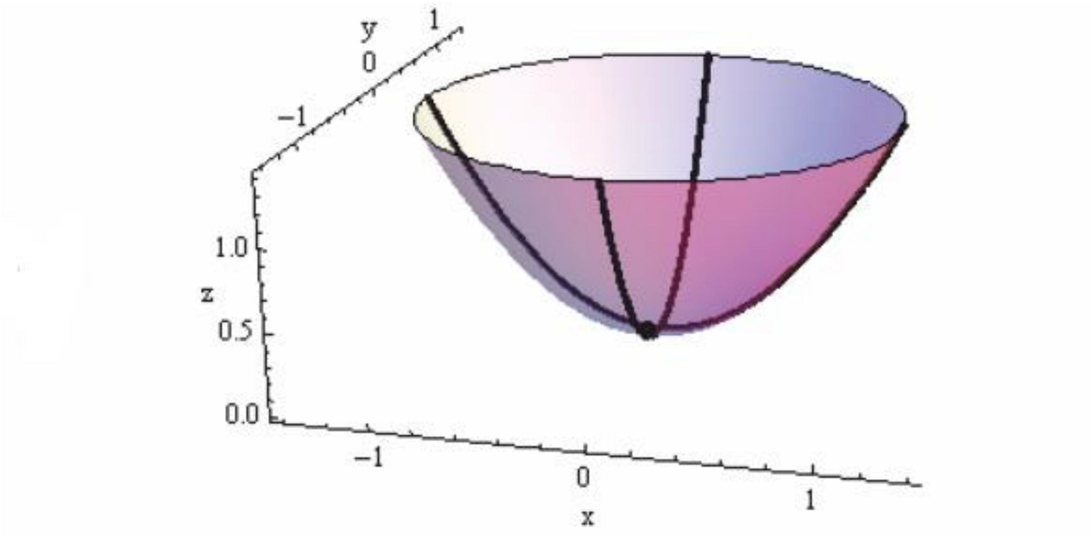
Определение 40.2. Пусть $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D(u)$.

Если частные производные $u'_{x_i}(x^0), i = 1,...,n$ равны 0 или не существуют, то x^0 называется критической точкой для функции u.

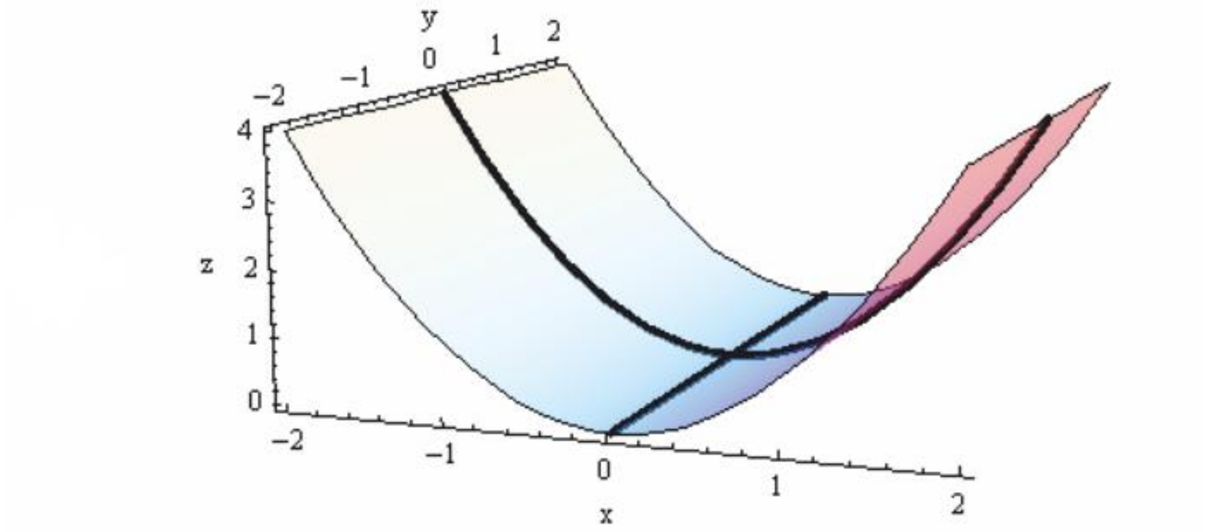
Из теоремы 40.1 следует, что любая точка экстремума является критической точкой для функции; наоборот не верно.

Пример 40.1. $z = x^2 + y^2$;

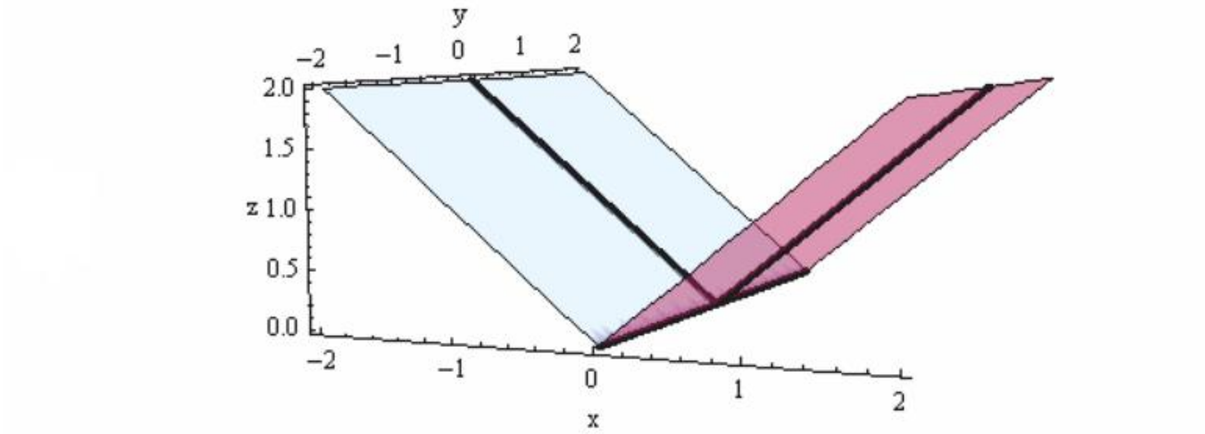
$z^0 = (0, 0)$ - точка минимума $z'_x(0, 0) = z'_y(0, 0) = 0$.



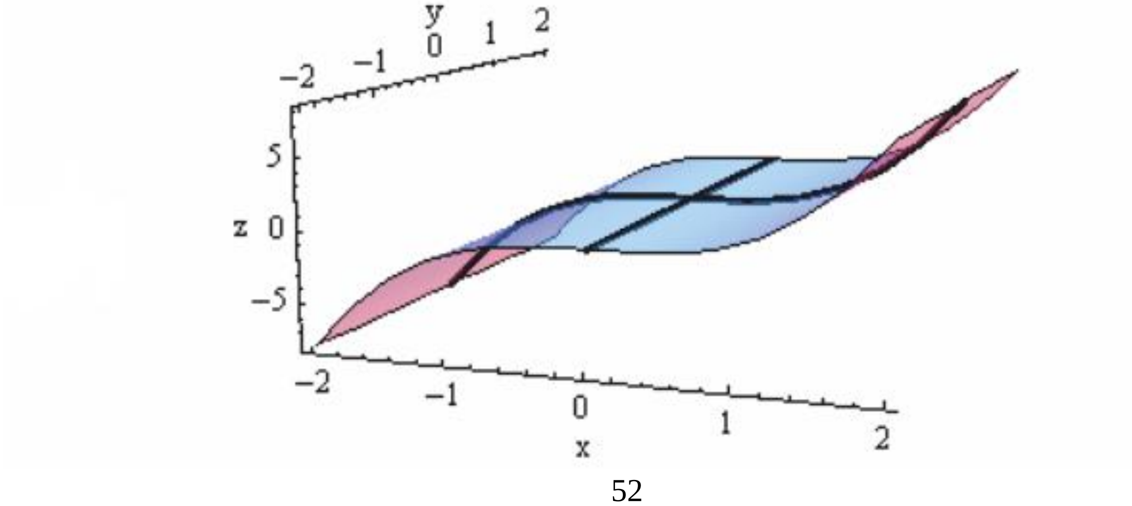
Пример 40.2. $z = x^2$; точки $z = (0, y)$ - точки минимума для функции z; $z'_x = 2x$; $z'_y = 0$; $z'_x(0, y) = 0$; $z'_y(0, y) = 0$.



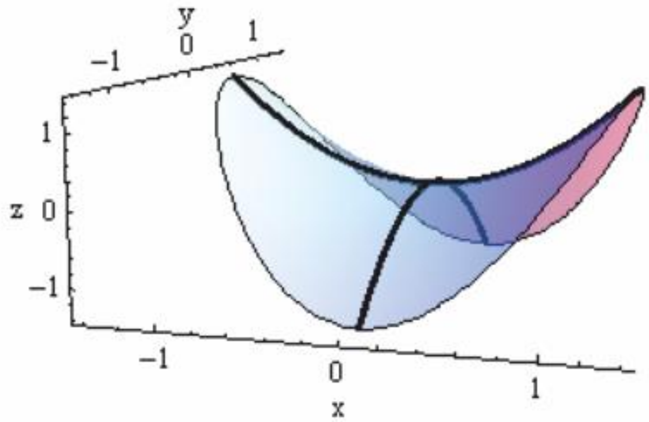
Пример 40.3. $z = |x|$; точки $z = (0, y)$ - точки минимума для функции z; $z'_y(0, y) = 0$; $z'_x(0, y)$ - не существует.



Пример 40.4. $z = x^3$; точки $z = (0, y)$ - критические точки для функции z; $z'_x(0, y) = 0$; $z'_y(0, y) = 0$; точки $(0, y)$ - не являются точками локального экстремума для функции z.



Пример 40.5. $z = x^2 - y^2$; точка $z^0 = (0, 0)$ - критическая для функции Z: $z'_x(0, 0) = 0;\ z'_y(0, 0) = 0$. Точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума.



Определение 40.3. Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - критическая точка для функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пусть:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда x^0 называется стационарной точкой для функции u.

Критические точки из примеров 40.1, 40.2, 40.4, 40.5 – стационарные. В примерах 40.4, 40.5 стационарные точки не являются точками экстремума.

Теорема 40.2. (достаточное условие экстремума). Пусть функция $z = z(x, y)$ дважды непрерывно-дифференцируема в окрестности своей стационарной точки (x_0, y_0). Пусть $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ и определитель $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда

1) если $A > 0,\ AC - B^2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ - точка локального минимума;

2) если $A < 0,\ AC - B^2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ - точка локального максимума;

3) если $AC-B^2<0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ - не является точкой локального экстремума функции $z(x,y)$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора 2-ого порядка для функции $z(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) (см. формулу 39.6), с учетом условий $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)=0$ получим:

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=z(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Delta x\cdot\Delta y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)\Delta y^2\right)+o(\rho^2)=$$

$$=z(x_0, y_0)+\frac{1}{2}\left(A\cdot\Delta x^2+2B\cdot\Delta x\cdot\Delta y+C\cdot\Delta y^2\right)+o(\rho^2),$$ где $\rho^2=\Delta x^2+\Delta y^2$. Пусть $\rho\neq 0 \Rightarrow \Delta x$ или $\Delta y\neq 0$.

Если $\Delta y\neq 0 \Rightarrow \Delta z=z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-z(x_0, y_0)=$

$$=\frac{(\Delta y)^2}{2}\left(A\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+2B\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}+C\right)+o(\rho^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta z}{\rho^2}=\frac{(\Delta y)^2}{2\rho^2}\left(A\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+2B\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}+C\right)+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}.$$

Пусть, например. $A>0, AC-B^2>0$. Тогда квадратный трехчлен $At^2+2Bt+C$ не имеет действительных корней и его минимальное значение (вершина параболы)$>0\Rightarrow$ при малых $\rho: \Delta z>0$, то есть точка (x_0, y_0) - точка локального минимума(минимум строгий).

Пример 40.6. Найти локальные экстремумы:

$z=x^3+y^3+3xy$.

1) Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x^2 \\ x = -y^2 \end{cases} \Rightarrow x = -x^4\,,\; x = 0,\; x = -1,$$

$(0;\,0);\ (-1;-1)$ - стационарные точки.

2) Достаточное условие экстремума:

$z''_{xx} = 6x; z''_{yy} = 6y;\ z''_{xy} = 3.$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Для точки (0; 0): $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$ в точке (0; 0) экстремума нет.

Для точки $(-1;-1):\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0;\ A = -6 < 0 \Rightarrow$ точка $(-1;-1)$ - точка локального максимума; $z_{\max}(-1;-1) = 1$.

Из доказательства теоремы 40.2 видно, что достаточным условием существования локального минимума является требование, чтобы $d^2z > 0,\ \forall \Delta x, \Delta y, \Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0$. $(d^2z < 0,\ \forall \Delta x, \Delta y)$ - для локального максимума. Аналогичные условия верны и в случае функции u 3-ёх и более переменных. А именно рассматривают матрицу Гессе(Гессиан):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & & & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

и вычисляют все главные миноры матрицы в стационарной точке:

$M_1^1,\ M_{1\,2}^{1\,2}, \ldots M_{1,\ldots,n}^{1,\ldots,n}$. Если все они положительны (положительно определенная матрица), то точка будет локальным минимумом. Если $M_1^1 < 0,\ M_{1\,2}^{1\,2} > 0, \ldots$ (миноры нечетного порядка отрицательны, миноры четного порядка – положительны (отрицательно определенная матрица)), то точка будет локальным максимумом.

Упражнение 40.1. Исследовать функцию $u=(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2+5$ на экстремум.

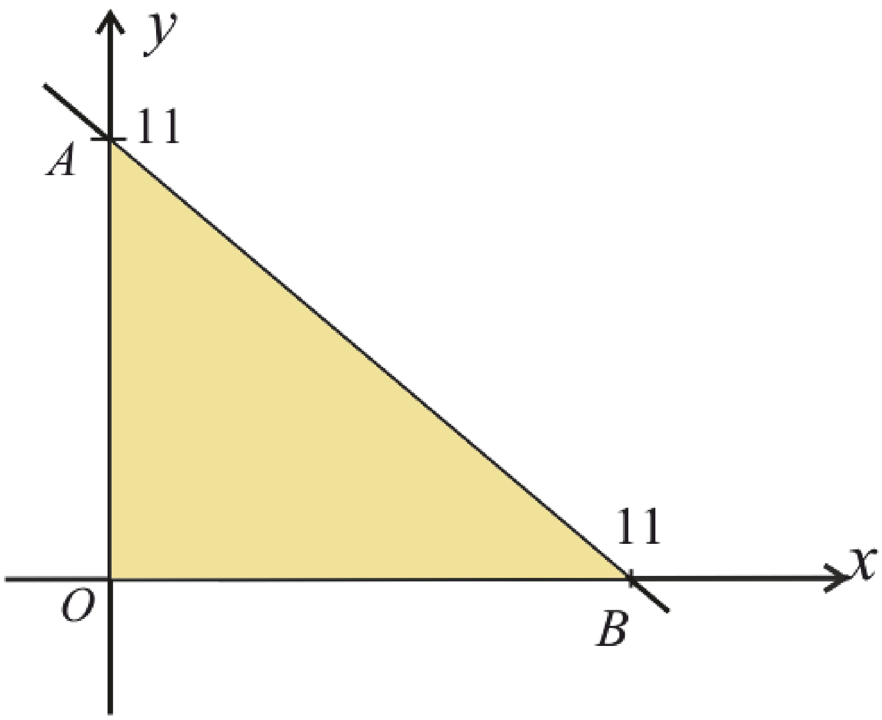
Упражнение 40.2. Какие из матриц положительно, отрицательно определены:

а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

При нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $z=f(x,y)$ на множестве используем теорему Вейерштрасса (теорема 15.4). Если множество замкнуто и ограничено, а функция z дифференцируема, то эти значения достигаются или в стационарных точках, или на границе множества.

Пример 40.7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-4x-2y+1$ на множестве ограниченном линиями:

$x=0,\ y=0,\ x+y=11$



$\begin{cases} z'_x = 2x - 4 = 0 \\ z'_y = 2y - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. $M_0(2, 1)$ - стационарная точка, лежит внутри множества.

Исследуем границу:

1) OA: $x = 0,\ 0 \le y \le 11,\ z = y^2 - 2y + 1$

$z'_y = 2y - 2 = 0,\ \ y = 1,\ M_1(0; 1)$.

2) OB: $y = 0,\ 0 \le x \le 11,\ z = x^2 - 4x + 1$

$z'_x = 2x - 4 = 0,\ \ x = 2,\ M_2(2; 0)$.

3) AB:

$y = 11 - x,\ 0 \le x \le 11,\ z = x^2 + (11 - x)^2 - 4x - 2(11 - x) + 1 = x^2 + (11 - x)^2 - 2x - 21$

$z'_x = 2x - 2(11 - x) - 2 = 0,\ \ 4x - 24 = 0,\ x = 6;\ y = 11 - 6 = 5,\ M_3(6; 5)$.

$M_4(11, 0)$; $M_5(0, 11); O(0,0)$ - угловые точки множества.

$z(M_0) = z(2, 1) = -4;\ z(M_1) = z(0, 1) = 0;\ z(M_2) = z(2, 0) = -3;$

$z(M_3) = z(6, 5) = 28;\ z(M_4) = z(11, 0) = 78;\ z(M_5) = z(0, 11) = 100;$

$z(0) = z(0, 0) = 1$.

Ответ: $z_{\max} = z(0, 11) = 100;\ z_{\min} = z(2, 1) = -4$.

При нахождении значений функции $z = z(x, y)$ на границе множества в примере 40.7 переменные x и y связывались дополнительными условиями(уравнениями связи), задающими границу множества. Такого рода задачи называются задачами условного экстремума.

Задача нахождения экстремума функции

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{40.2}$$

при условиях: $\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\quad \ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$. (40.3)

называется задачей условного экстремума.

Пример 40.8. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$.

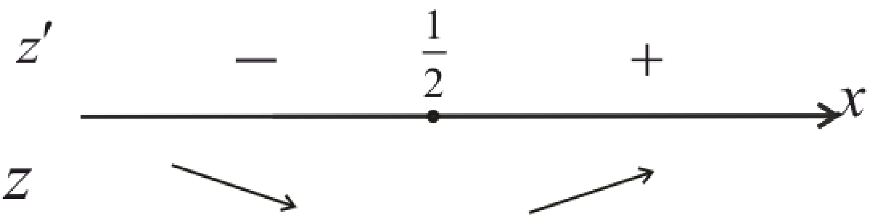
Решение. Из уравнения связи выразим *y*:

$y = 1 - x;\ z = z(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$

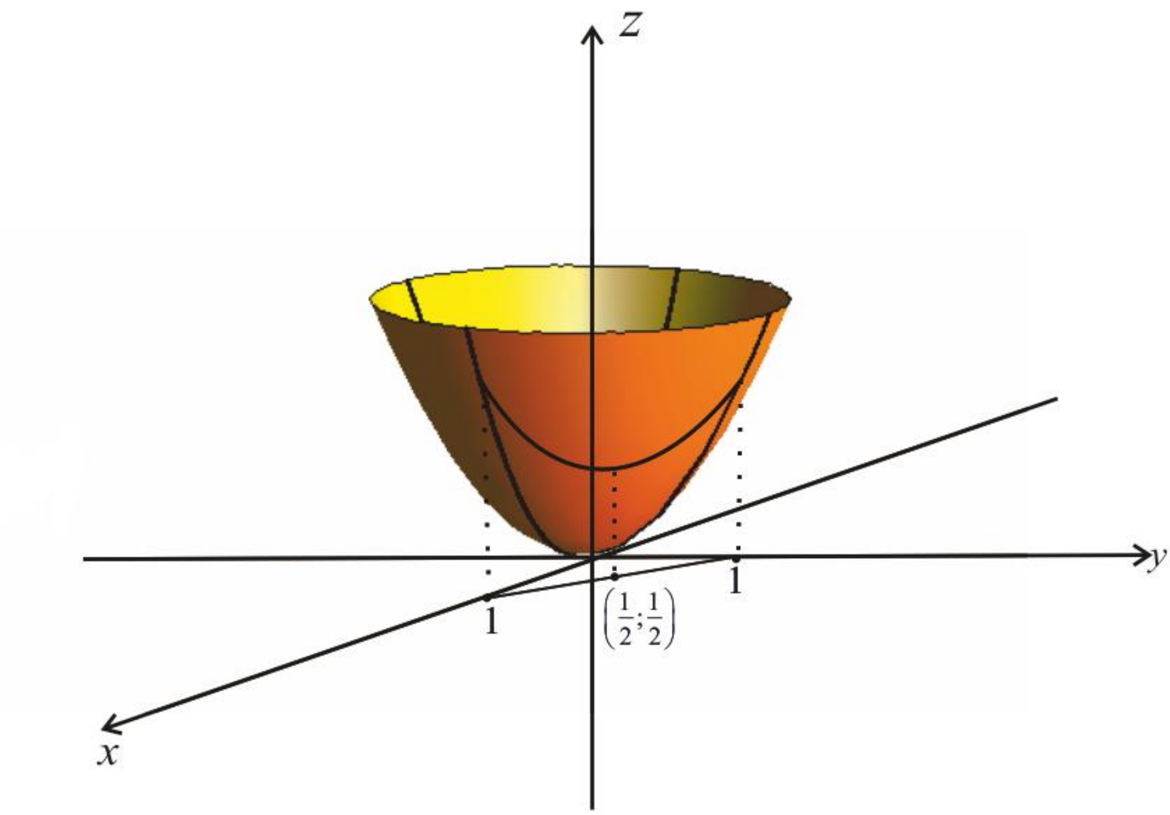
$\frac{d}{dx} z(x, 1-x) = 4x - 2 = 0,\ x = \frac{1}{2};\ y = 1 - x = \frac{1}{2}.$

Используем достаточные условия экстремума(теорема 4 параграф 15):

$z' = 4x - 2;\ 4x - 2 = 0;\quad x = 1/2$



Точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ - условный локальный минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$.



Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума (40.2) – (40.3).

Определение 40.4. Функция вида:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (40.4)$$

называется функцией Лагранжа, а переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - множителями Лагранжа.

Пусть функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $j = 1, 2, \ldots, m$ дважды непрерывно-дифференцируемые. Рассмотрим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{cases} \qquad (40.5)$$

Если $a_0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0)$ - точка условного экстремума для задачи (40.2) – (40.3), то ее координаты необходимо, при некоторых значениях $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$, будут решением системы (40.5).

При этом нужно предположить еще, что ранг матрицы Якоби:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a^0) & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a^0) \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(a^0) & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(a^0) \end{pmatrix}$$ равен m, (см.[1]).

Найдя точку $a_0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0)$, исследуют $d^2 L(a_0)$. А именно, если:

$d^2 L(a_0) > 0 \Rightarrow a_0$ - точка локального минимума. (40.6)

$d^2 L(a_0) < 0 \Rightarrow a_0$ - точка локального максимума. (40.7)

(40.6) и (40.7) – достаточные условия экстремума. При этом на переменные $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ в $d^2 L$ накладывают дополнительные условия:

$$d\varphi_j(a_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a_0) \cdot dx_i = 0, \; j = 1, \ldots, m. \qquad (40.8)$$

Пример 40.9. Найти условный экстремум функции $u = x \cdot y$ при условии $x + y = 0$.

Решение. Функция Лагранжа:

$L(x,\, y,\, \lambda) = xy + \lambda(x + y)$.

1) Необходимое условие (формула (40.5)):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0 \Rightarrow y = -\lambda \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0 \Rightarrow x = -\lambda \end{cases}$$

$x + y = 0 \Rightarrow -2\lambda = 0,\ \lambda = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ a_0\ (0;\, 0)$.

2) Достаточные условия. Найдем d^2L.

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$.

$d^2L(a_0) = 2dxdy$. По условиям (40.8):

$d\varphi = dx + dy = 0;\ dx = -dy$, поэтому

$d^2L = -2dy^2 < 0 \Rightarrow$ $a_0\ (0;\, 0)$ точка условного локального максимума.

Упражнение 40.3. Найти условный экстремум функции $u = x \cdot y$ при условии $x - y = 0$.

Пример 40.10. Найти условный экстремум функции $u = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 0$.

Решение. Функция Лагранжа:

$L(x,\, y,\, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

1) Необходимое условие:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 1, \quad \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

2) Достаточные условия. Найдем d^2L.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

$d^2L(a_0) > 0 \Rightarrow a_0$ - точка условного локального минимума

$d^2L(a_1) < 0 \Rightarrow a_1$ - точка условного локального максимума.

Упражнение 40.4. 1) $u = 3x + 4y \to \max(\min)$ при условии $x^2 + y^2 = 25$.

2) $u = 3x + 4y \to \max(\min)$ при условии $(x-3)^2 + y^2 = 25$.

Задания к § 40 .

40.1. Найти локальные экстремумы функции

1) $z = (x-9)^2 + (y+4)^2$, 2) $z = x^2 - 4xy + 3y^2 - 6x + 8y + 10$,

3) $z = x^3 - 5xy^2 + 21x - 4y$, 4) $z = x^4 - 2x^2 + 4xy + y^4 - 2y^2$,

5) $z = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$, 6) $z = \dfrac{1 + 2x - 2y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

40.2. Найти условный экстремум функции при данном уравнении связи.

1) $z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$.

2) $z = x^2 - y^2$ при $x + 3y - 6 = 0$.

3) $z = x^2 + y^2$ при $x - 6y + 12 = 0$.

40.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области *D*, ограниченной линиями.

1) $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y + 7,\ D: x = 0,\ y = 0,\ x - y = 6$.

2) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8,\ D: x = -4,\ \ x = 4,\ y = -5,\ y = 0$.

3) $z = x^2 + xy - 1,\ D: y = 4x^2 - 4,\ y = 0$.

4) $z = xy^2,\ D: x^2 + y^2 \le 1$.

5) $z = 4 - 2x^2 - y^2,\ D:\ y = 0,\ y = \sqrt{1 - x^2}$.

Ответы §40.

40.1. 1) $M_0(9,\ 4)$ – точка локального минимума, $z_{\min} = 0$.

2) нет экстремума.

3) экстремума нет.

4) экстремума нет.

5) $O(0,\ 0)$ – точка локального минимума, $z_{\min} = 0$.

6) $M_0(2,\ -2)$ – точка локального максимума, $z_{\max} = 3$.

40.2. 1) $A\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}, \frac{6\sqrt{3}}{5}\right)$ – точка условного минимума, $B\left(-\frac{8\sqrt{3}}{5}, -\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)$ – точка условного максимума.

2) $A\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$ – точка условного минимума.

3) $A\left(\frac{12}{37}, -\frac{72}{37}\right)$ – точка условного минимума.

40.3. 1) $z_{наиб} = z(6,\ 0) = z(0,\ 6) = 26,\ z_{наим} = z\left(0, -\frac{3}{2}\right) = z\left(\frac{3}{2},\ 0\right) = \frac{19}{4}$.

2) $z_{наиб} = z(4,\ -5) = 28,\ z_{наим} = z(-4,\ -5) = -44$.

3) $z_{наиб} = z\left(-\frac{1}{2},\ -3\right) = \frac{3}{4},\ z_{наим} = z\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{9}\right) = -\frac{56}{27}$.

4) $z_{наиб} = z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$,

$z_{наим} = z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

5) $z_{наиб} = z(0,0) = 4$, $z_{наим} = z(-1,0) = z(1,0) = 2$.

§ 41.Применение в задачах экономики.

Рассмотрим производственную функцию $z = f(x, y)$, которая выражает зависимость объема производства *z* от факторов производства *x* и *y*. В частности, таковой является функция Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, показывающая объем выпуска продукции *Y* при затратах капитала *K* и трудовых ресурсов *L*. Параметр $A > 0$ отображает производительность конкретно взятой технологии, α, β - показатели производственной функции $(0 \le \alpha + \beta \le 1)$.

Зная функцию $z = f(x, y)$, можно найти различные экономические характеристики.

1) Предельная производительность факторов производства:

$$\omega_x = \frac{\partial z}{\partial x},\ \omega_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

2) Предельная норма замещения двух факторов производства:

$n_{xy} = -\dfrac{\omega_y}{\omega_x}$, $n_{yx} = -\dfrac{\omega_x}{\omega_y}$, где n_{xy} - предельная норма замещения фактора производства *x* фактором производства *y*; n_{yx} - предельная норма замещения фактора производства *y* фактором производства *x*.

3) Частный коэффициент эластичности выпуска продукции по определенному фактору:

$E_x(z) = \dfrac{\partial z}{\partial x} : \dfrac{z}{x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{x}{z}$, $\quad E_y(z) = \dfrac{\partial z}{\partial y} : \dfrac{z}{y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{y}{z}$, где $E_x(z)$, $E_y(z)$ - эластичности объема производства относительно факторов *x* и *y* соответственно.

Коэффициент эластичности приближенно показывает, на сколько процентов изменится объем производства при изменении одного фактора производства на 1% с учетом неизменности другого фактора.

Пример 41.1. Имеется производственная функция $z = 4x^2 + xy - y^2$, где x – затраты живого труда, y – затраты овеществленного труда. Найдем коэффициенты эластичности

$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y$. Отсюда имеем

$$E_x(z) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x(8x + y)}{4x^2 + xy - y^2},\ E_y(z) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y(x - 2y)}{4x^2 + xy - y^2}.$$

Вычислим значения $E_x(z)$ и $E_y(z)$ при $x = 3,\ y = 1$: $E_x(z) \approx 2$, $E_y(z) \approx 0{,}03$.

Следовательно, с увеличением затрат живого труда на 3% объем производства возрастает на 2%, а с увеличением затрат овеществленного труда на 1% объем производства увеличится на 0, 03%.

Найдем предельную производительность факторов:

$\omega_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 8x + y,\ \omega_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y$, получаем $\omega_x = 25$ - предельная производительность труда, $\omega_y = 1$ - предельная фондоотдача.

Вычислим предельные нормы замещения

$n_{xy} = -\frac{\omega_y}{\omega_x} = -\frac{1}{25} = -0{,}04,\ n_{yx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y} = -25$. Таким образом, при увеличении затрат овеществленного труда на 1 единицу затраты живого труда можно уменьшить на 25 единиц. И наоборот, при увеличении затрат живого труда на 1 единицу затраты овеществленного труда можно уменьшить на 0, 04. При этом объем производства останется неизменным.

Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $Y = y(K, L)$, где Y – стоимость выпускаемой продукции, L – затраты труда, K – объем производственных фондов. Тогда

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot dL = Y'_K \cdot dK + Y'_L \cdot dL,$$

где Y'_K - предельная производительность труда, Y'_L - предельная фондоотдача. Следовательно, $Y'_K \Delta K$ - стоимость добавочной продукции с использованием добавочного объема фондов, $Y'_L \Delta L$ - стоимость добавочной продукции при добавочных затратах труда.

Пример 41.2. Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где Y - объем выпускаемой продукции. На производстве имеется всего 1000 единиц трудовых ресурсов, основные фонды оцениваются в 1 млн. ден. ед. 1 единица трудовых ресурсов за месяц дает продукции на 100 ден.ед. Если увеличить выпуск продукции на 2%, то надо будет увеличить фонды на 5% или затраты труда на 10%.

Найдем эластичность выпуска $E_K(Y)$ по фондам и эластичность $E_L(Y)$ по труду:

$$E_K(Y) = \frac{K}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha = \frac{2\%}{5\%} = 0{,}4$$

$$E_L(Y) = \frac{L}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta = \frac{2\%}{10\%} = 0{,}2.$$

Тогда имеем: $Y = AK^{0,4} \cdot L^{0,2}$. Найдем коэффициент A. При K=1 млн.$=10^6$ и $L = 1000$ выпуск продукции составит $Y = 100 \cdot 1000 = 10^5$. Отсюда получаем

$$10^5 = A(10^6)^{0,4} \cdot 1000^{0,2}, \ A = 100.$$

Производственная функция имеет вид $Y = 100 \cdot K^{0,4} \cdot L^{0,2}$.

Предельная производительность:

$$\omega_L = Y'_L = 20K^{0,4} \cdot L^{-0,8} = 20 \cdot (10^6)^{0,4} \cdot (10^3)^{-0,8} = 20.$$

Средняя фондоотдача:

$$K = \frac{Y}{K} = \frac{10^5}{10^6} = 0{,}1.$$

Предельная фондоотдача:

$$\omega_K = Y'_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = 40K^{-0,6} \cdot L^{0,2} = 40 \cdot (10^6)^{-0,6} \cdot (10^3)^{0,2} = \frac{40}{10^3} = 0{,}04.$$

Предельные нормы замещения труда капиталом и капитала трудом:

$$n_{LK} = -\frac{\omega_K}{\omega_L} = -\frac{0,04}{20} = -0,002,\ n_{KL} = -\frac{\omega_L}{\omega_K} = -\frac{20}{0,04} - 500.$$

Пусть $x_1, x_2, ..., x_m$ - количество производимых m видов продукции, а их цены - $p_1, p_2, ..., p_m$ соответственно. Затраты на производство этих видов продукции задаются функцией издержек $C = C(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = \Pi\,(x_1, x_2, ..., x_m) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_mx_m - C(x_1, x_2, ..., x_m). \quad (41.1)$$

Максимум прибыли будет равен локальному экстремуму функции П при $x_i \geq 0\ (i = \overline{1, m})$. Следовательно, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i},\ i = \overline{1, m}, \text{ или}$$

$$p_i - \frac{\partial S}{\partial x_i},\ i = \overline{1, m}. \quad (41.2)$$

Система уравнений (41.2) реализует известное правило экономики: предельная стоимость(цена) продукции равна предельным издержкам на производство этой продукции.

Пример 41.3. Пусть производится два вида продукции в количестве *x* и *y*. Известны цены одной единицы продукции $p_1 = 32$ и $p_2 = 24$ ден. ед. соответственно. Функция затрат имеет вид $C = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2$. Тогда прибыль выражается функцией двух переменных

$$\Pi(x, y) = 32x + 24y - \frac{3}{2}x^2 - 2xy - y^2.$$

Для нахождения экстремума необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 32 - 3x - 2y = 0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 24 - 2x - 2y = 0.$$

Получаем точку $(x_0;\ y_0) = (8;\ 4)$. Поскольку

$A = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -3 < 0,\ B = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = -2,\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -2,\ \Delta = AC - B^2 = 6 - 4 = 2 > 0$, то найденная точка (8; 4) является точкой максимума функции прибыли, который равен $\Pi_{\max} = 176$ ден. ед.

Задания к § 41 .

41.1. Для производственных функций $z(x, y)$ определите $E_x(z)$ и $E_y(z)$ при заданных значениях *x* и *y*:

1) $z = 6x^2 + 2xy + 3y^2,\ x = 1,\ y = 2$,

2) $z = x^3 + 2xy^2 + 5,\ x = 2,\ y = 1$,

3) $z = 2x^3y^2 + \dfrac{4x}{y} + 6,\ x = 1,\ y = 1$,

4) $z = 2x^2y - \dfrac{6x}{y^2} - 3,\ x = 1,\ y = 3$,

5) $z = \ln(x^2 + y^2),\ x = 2,\ y = 2$.

41.2. Пусть производственная функция есть функция Кобба - Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на *a*%, надо увеличить фонды на *b*% или затраты труда на *c*%. В настоящее время единица трудовых ресурсов за месяц дает продукции на *M* ден. ед., а всего трудовых ресурсов *L* единиц. Основные фонды оцениваются в *K* ден.ед. Составить производственную функцию. Найти предельную производительность труда, среднюю и предельную фондоотдачи. Определить предельные нормы замещения труда капиталом и капитала трудом.

1) $a = 2,\ b = 5, c = 6,\ K = 10^{10}, L = 10000,\ M = 10^7$

2) $a = 1,\ b = 5, c = 4,\ K = 10^9, L = 1000,\ M = 10^7$

3) $a = 3,\ b = 6, c = 9,\ K = 10^8, L = 1024,\ M = 10^8$

4) $a = 2,\ b = 2, c = 4,\ K = 10^{10}, L = 625,\ M = 10^7$

5) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ K=10^9,\ L=1000,\ M=10^7$.

41.3. На предприятии производят два вида товаров, причем товар первого вида реализуют по цене 8 ден. ед., товар второго вида – по цене 10 ден. ед. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C=x^2+xy+y^2$. При каких объемах x и y прибыль будет максимальной?

41.4. Некоторая фирма производит два вида товаров и продает их по рыночной цене 400 и 300 ден. ед. соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x,\ y)=2x^2+2xy+3y^2$, где x – объем выпуска товара первого вида, y – объем выпуска товара второго вида. При каких объемах выпуска товаров первого и второго видов прибыль будет максимальной?

41.5. Цены на два вида товаров равны соответственно 40 и 30 ден. ед. Определите, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной. Если функция общих издержек имеет вид: $C(x,\ y)=\dfrac{3}{2}x^2+2xy+3y^2$.

41.6. Фирма имеет два магазина, издержки в которых определяются функциями $C_1(x)$ и $C_2(y)$ соответственно, где x и y – объемы продаваемой продукции. Общий спрос на товары определяется ценой p за единицу продукции, зависящей от объема выпускаемой продукции $z=x+y$ и задается функцией $z=f(p)$. Рассчитайте оптимальный объем реализации продукции, оптимальную цену в целом и распределение производственной программы по магазинам, если:

1) $C_1(x)=x^2+2x+100,\ C_2(y)=y^2+3y+110,\ z=5000-10p$;

2) $C_1(x)=x^2+6x+300,\ C_2(y)=y^2+24y+600,\ z=700-4p$;

3) $C_1(x)=x^2+34x+800,\ C_2(y)=y^2+20y+700,\ z=800-2p$.

Ответы §41.

41.1. 1) $E_x(z)\approx 0{,}73$; $E_y(z)\approx 0{,}63$;

2) $E_x(z) \approx 1{,}65$; $E_y(z) \approx 0{,}47$;

3) $E_x(z) \approx 0{,}91$; $E_y(z) \approx 0$;

4) $E_x(z) \approx 4{,}86$; $E_y(z) \approx 3{,}14$;

5) $E_x(z) \approx \ln^{-1} 8$; $E_y(z) \approx \ln^{-1} 8$.

41.2. 1) Предельная производительность $\omega_L \approx 333333{,}33$; средняя фондоотдача $K = 10$; предельная фондоотдача $\omega_K = 4$; предельные нормы замещения труда капиталом и капитала трудом $n_{LK} == -12 \cdot 10^{-7}, n_{KL} == -8{,}33 \cdot 10^{5}$;

2) $\omega_L = 2500000$; $K = 10$; $\omega_K = 2$; $n_{LK} == -8 \cdot 10^{-10}, n_{KL} == -125 \cdot 10^{4}$;

3) $\omega_L = \dfrac{2}{3} \cdot 10^{8}$; $K = 1024$; $\omega_K \approx 341{,}33$; $n_{LK} == -512 \cdot 10^{-8}, n_{KL} == -625 \cdot 10^{4}$;

4) $\omega_L = 5 \cdot 10^{6}$; $K = 0{,}625$; $\omega_K \approx 0{,}31$; $n_{LK} == -625 \cdot 10^{-4}, n_{KL} == -4$;

5) $\omega_L = \dfrac{2}{3} \cdot 10^{7}$; $K = 10$; $\omega_K \approx 3{,}33$; $n_{LK} = 5 \cdot 10^{-7}, n_{KL} == 2 \cdot 10^{6}$.

41.3. $x_0 = 2$; $y_0 = 4$. Прибыль составит 28 ден.ед.

41.4. $x = 90$, $y = 20$, $z_{\max} = 21000$ ден.ед.

41.5. $x = 10$, $y = 5$, $z_{\max} = 275$ ден.ед.

41.6 1) $z = 416$, $p = 458$, $x = 208{,}3$, $y = 307{,}8$.

2) $z = 151$, $p = 147{,}25$, $x = 80$, $y = 71$.

3) $z = 186{,}5$, $p = 306{,}75$, $x = 89{,}75$, $y = 96{,}75$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Кудрявцев,Л.Д. Краткий курс математического анализа. / Л.Д.Кудявцев. – М.: Наука, 1989.

2. Демидович,Б.П.Сборник задач по математическому анализу./ Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1990.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа./ Под ред.А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981.-Т.1.

4. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч./ А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк/. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

5. Математический анализ в вопросах и задачах./Под ред.В.Ф.Бутузова.- М.: Физматлит, 2001.

5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова/. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

6. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике./ Т.А. Сухая, В.Ф.Бубнов/. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.

7. Индивидуальные задания по высшей математике./ под ред. А.П. Рябушко /. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

8. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике./ Л.А.Кузнецов/. – М: Высшая школа, 1983.

9.Матвеева,Л.Д., Рудый,А.Н. Математический анализ. 1 семестр. /Л.Д.Матвеева,А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2015.

10.Кудрявцев,Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. / Кудрявцев,Л.Д.,Кутасов, А.Д.,Чехлов,В.И.,Шабунин,М.И. /.-Санкт-Петербург, 1994.

11. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч./ А.И. Герасимович, Н.П.Кеда,М.Б.Сугак/. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2.

12. Глебов, Н.И. Методы оптимизации/ Глебов, Н.И., Кочетов, Ю.А., Плясунов,А.В/.- Новосибирск, НГУ, 2000.

13.Матвеева,Л.Д., Бань Л.В.,РудыйА.Н. Математический анализ. Часть 2. /Л.Д.Матвеева,Л.В.Бань,А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2015.Электронный учебный материал.Рег.№ БНТУ/ЭФ 41-35.2015.